Le cours – T° spé : Dénombrement

Dans ce résumé de cours, nous considérerons pour les exemples les deux ensembles : $E_1=\{1;2;3;4\}$ et $E_2=\{a;b;c\}$.
Nous avons donc $Card(E_1)=n_1=4$ et $Card(E_2)=n_2=3$

Principe additif (cardinal de l'union)	Soit E_1 et E_2 deux ensembles finis **disjoints**. Le nombre d'éléments de la réunion $E_1\cup E_2$ est $\boldsymbol{Card(E_1\cup E_2)=Card(E_1)+Card(E_2)}$.	$E_1\cup E_2=\{1;2;3;4;a;b;c\}$ $Card(E_1\cup E_2)=n_1+n_2=7$
Produit cartésien	Le produit cartésien $E_1\times E_2$ est l'ensemble des **couples** (e_1,e_2) où $e_1\in E_1$ et $e_2\in E_2$. Le produit cartésien $E_1\times E_2\times\ldots\times E_k$ est l'ensemble des **k-uplets** $(e_1,e_2,\ldots,e_k)$ où $e_1\in E_1$ et $e_2\in E_2\ldots$ $e_k\in E_k$. Le produit cartésien $E_1{}^k$ est l'ensemble des **k-uplets** $(e_1,e_2,\ldots,e_k)$ où $e_1,e_2,\ldots,e_k\in E_1$	$E_1\times E_2=\{(1,a);(1,b);(1,c);(2,a);\ldots;(3,c)\}$ $E_1{}^3=\{(1,1,1);(1,1,2);(1,1,3);\ldots;(4,4,4)\}$
Principe multiplicatif (cardinal du produit cartésien)	Soit E_1 et E_2 deux ensembles. Le nombre d'éléments du produit cartésien $E_1\times E_2$ est $\boldsymbol{Card(E_1\times E_2)=Card(E_1)\times Card(E_2)}$. Généralisable à k ensembles.	$Card(E_1\times E_2)=n_1\times n_2=4\times 3=12$ $Card(E_1{}^3)=n_1^3=4^3=64$ (nombre de 3-uplets de E_1)
Parties d'un ensemble	Une partie d'un ensemble E est un ensemble d'éléments de E. L'ensemble des parties de E contient toujours $\varnothing$ et E. Le nombre de parties de E est $\boldsymbol{2^{Card(E)}}$.	Exemples de parties de E_1 : $\varnothing$; $\{1\}$; $\{1;2;4\}$; $\{2;3\}\ldots$ il y a $2^{n_1}=2^4=16$ parties de E_1.
Nombre de k-uplets de E (répétitions possibles, l'ordre est important)	Soit E un ensemble. Le nombre de k-uplets de E est $\boldsymbol{(Card(E))^k}$	Exemples de 5-uplets de E_2 : (a,a,b,a,c) ; (a,b,c,a,b) ; (b,b,a,c,c)… Il y en a $3^5=243$ en tout.
Nombre de k-uplets d'éléments distincts de E (pas de répétition, l'ordre est important)	Soit E un ensemble avec $Card(E)=n$. Le nombre de k-uplets d'éléments distincts de E est $\boldsymbol{\dfrac{n!}{(n-k)!}}$	Exemples de 3-uplets d'éléments distincts de E_1 : (1,2,3) ; (3,2,1) ; (4,1,3)… Il y en a en tout : $\dfrac{4!}{(4-3)!}=\dfrac{4!}{1!}=4!=1\times 2\times 3\times 4=24$
Nombre de permutations (n-uplets d'éléments distincts) (pas de répétition, l'ordre est important, tous les éléments)	Soit E un ensemble avec $Card(E)=n$. Le nombre de permutations de E est $\boldsymbol{n!}$	Exemples de permutations de E_1 : (1,2,3,4) ; (2,1,3,4) ; (4,3,2,1)… Il y en a $4!=1\times 2\times 3\times 4=24$ en tout.
Nombre de combinaisons (pas de répétition, l'ordre ne compte pas, k éléments de E)	Une combinaison de k éléments de E est une partie de E à k éléments. La nombre de combinaisons de k éléments de E est $\boldsymbol{\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}}$ $(n=Card(E))$	Exemples de combinaisons de 3 éléments de E_1 : $\{1;2;3\}$; $\{1;2;4\}$; $\{2;3;4\}\ldots$ Il y en a $\binom{4}{3}=\dfrac{4!}{3!(4-3)!}=4$ en tout

Symétrie des coefficients binomiaux : $\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}$ Exemple : $\binom{10}{9}=\binom{10}{1}$

Somme des coefficients binomiaux (nombre de parties) : $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$

Relation de Pascal : $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$

k→	0	1	2	3	4	5	6	7
$n=0$	1							
$n=1$	1	1						
$n=2$	1	2	1					
$n=3$	1	3+3		1				
$n=4$	1	4	6	4	1			
$n=5$	1	5	10	10	5	1		
$n=6$	1	6	15	20	15	6	1	
$n=7$	1	7	21	35	35	21	7	1

Les méthodes – T° spé : Dénombrement

Quelques exemples :

1) Dans le championnat de France de rugby, composé de 14 équipes et appelé TOP 14, les six premières équipes qui ont le plus de points à la fin des matchs aller-retour (phase régulière) passent à la deuxième phase du championnat. Combien de **classements** composés des six équipes qui atteignent la deuxième phase sont possibles ?

Solution :
Il n'y a pas de répétition et l'ordre des 6 premières équipes est important. Il s'agit donc du nombre de 6-uplets d'éléments distincts de l'ensemble des 14 équipes. Il y a donc $\dfrac{14!}{(14-6)!}=\dfrac{14!}{8!}=2162160$ classements possibles.

2) Combien de classements des 14 équipes de la première phase du TOP 14 sont possibles ?

Solution :
Il s'agit du nombre de permutations des 14 équipes. Il y a donc $14!=87178291200$ classements possibles.

3) On dispose d'un jeu de 32 cartes, toutes différentes. Une « main » de 4 cartes est un ensemble de 4 cartes dont l'ordre n'importe pas.
a) Combien de « mains » de 4 cartes peut-on alors former ?
b) On tire simultanément 4 cartes au hasard. Quelle est la probabilité d'avoir les 4 as ?

Solution :
a) L'ordre n'importe pas et il ne peut pas avoir répétition. Il s'agit donc du nombre de combinaisons de 4 cartes parmi les 32. Il y a donc $\binom{32}{4}=\dfrac{32!}{4!(32-4)!}=35960$ mains possibles.
b) Il n'y a qu'une main possible contenant les 4 as, la probabilité est donc $p=\dfrac{1}{35960}$.

4) Dix amis, dont Hugo et Kylian, se partagent au hasard en deux équipes de 5 pour faire un match de jorki (ou football à 5). Combien d'équipes comportant Hugo et Kylian peut-on former ?

Solution :
Hugo et Kylian sont placés dans l'équipe. Il faut ensuite compléter l'équipe avec 3 personnes parmi les 8 amis restants. L'ordre n'importe pas, il s'agit donc du nombre de combinaisons des 3 amis parmi les 8. Il y a donc $\binom{8}{3}=\dfrac{8!}{3!(8-3)!}=56$ équipes possibles.

5) Un code PIN de smartphone est un code confidentiel composé de 4 chiffres. Combien y a-t-il de codes PIN différents ?

Solution :
Il peut y avoir répétition des chiffres et l'ordre est important. Il s'agit donc du nombre de 4-uplets de l'ensemble des chiffres (de 0 à 9). Il y a donc $10^4=10000$ codes PIN différents.