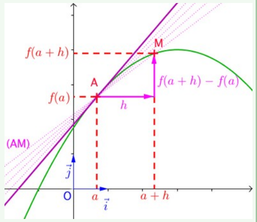
Le cours – T° spé : Compléments fonctions et TVI

Prérequis : fonctions dérivées, application dérivation, fonction exponentielle

Nombre dérivé, tangente et continuité :

$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ ou $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$



$f'(a)$ est le **nombre dérivé en a**. Il correspond au **coefficient directeur de la tangente** à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a.

Équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

Continuité : f est **continue en a** si : $\lim_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x)=\lim_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x)=f(a)$.

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et $\lambda\in\mathbb{R}$, alors la somme $f+g$, le produit $\lambda\times f$, le produit $f\times g$, f^n (ou n est un entier naturel non nul) et $f\circ g$ sont continus sur I. Si de plus g ne s'annule pas sur I alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I.

Une fonction **dérivable** sur un intervalle I est **continue** sur cet intervalle.

Dérivées des fonctions composées :

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))\qquad (f\circ g)(x)=f(g(x))$$

Exemple : si $f(x)=2x+6$ et $g(x)=\sqrt{x}$, alors :
$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x+6)=\sqrt{2x+6}$ et $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(\sqrt{x})=2\sqrt{x}+6$

Attention aux ensembles de définition !

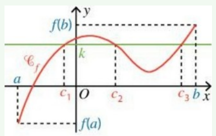
Fonction	Dérivée	Exemple
$f(x)=(u(x))^n$	$f'(x)=n\times u'(x)\times(u(x))^{n-1}$	$f(x)=(2x+6)^5$ $f'(x)=5\times2\times(2x+6)^4=10(2x+6)^4$
$f(x)=\sqrt{u(x)}$	$f'(x)=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	$f(x)=\sqrt{x^2+3}$ $f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$
$f(x)=e^{u(x)}$	$f'(x)=u'(x)\times e^{u(x)}$	$f(x)=e^{x^3+1}$ $f'(x)=3x^2e^{x^3+1}$
$(g\circ f)$	$f'\times(g'\circ f)$	

Théorème des valeurs intermédiaires et son corollaire :

Théorème des valeurs intermédiaires :

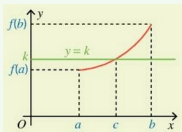
On considère la fonction f **définie** et **continue** sur un intervalle $[a ; b]$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **au moins** un réel c compris entre a et b tel que $f(c)=k$.

Dans ces conditions, l'équation $f(x)=k$ admet **au moins** une solution dans l'intervalle $[a ; b]$.



Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires :

On considère la fonction f **définie**, **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle $[a ; b]$, alors, pour tout nombre k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ possède une **unique solution** dans l'intervalle $[a ; b]$.



Les méthodes – T° spé : Compléments fonctions et TVI

Étude d'une fonction composée :

On considère la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{\frac{2x}{3x+1}}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Étudier les variations de f.

Solutions :

1) f est définie si $\frac{2x}{3x+1}\geq 0$. Il nous faut donc étudier son signe :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		0		$+\infty$
$2x$		$-$	⋮	$-$	0	$+$	
$3x+1$		$-$	0	$+$	⋮	$+$	
$\frac{2x}{3x+1}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

On en déduit que f est définie sur l'intervalle $D_f=\left]-\infty\,;-\frac{1}{3}\right[\cup[0\,;+\infty[$.

2) f est de la forme $f(x)=\sqrt{u(x)}$ avec $u(x)=\frac{2x}{3x+1}$. On a $u'(x)=\frac{2(3x+1)-3\times2x}{(3x+1)^2}=\frac{2}{(3x+1)^2}$.

On en déduit : $f'(x)=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}=\frac{\frac{2}{(3x+1)^2}}{2\sqrt{\frac{2x}{3x+1}}}=\frac{1}{(3x+1)^2\sqrt{\frac{2x}{3x+1}}}>0$ sur D_f.

La fonction f est donc croissante sur son ensemble de définition.

Utilisation du théorème des valeurs intermédiaires :

1) On considère la fonction g, définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=x^3-3x-3$.

a) Étudier le sens de variation de g. On donne les résultats suivants : $\lim_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$, $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$. Dresser son tableau de variation.

b) Calculer $g(3)$.

c) Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$, que l'on notera α.

d) A l'aide de la calculatrice, donner la valeur approchée de α à 10^{-2}.

e) A l'aide des résultats précédents, établir le tableau de signe de $g(x)$.

2) f est la fonction définie, pour tout réel x différent de -1 et 1 par $f(x)=\frac{2x^3+3}{x^2-1}$.

a) Démontrer que, pour tout réel x différent de -1 et de 1 : $f'(x)=\frac{2x\,g(x)}{(x^2-1)^2}$.

b) Étudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

c) Démontrer que $f(\alpha)=\frac{3(2\alpha+3)}{\alpha^2-1}$

Solution :

1) a) $g'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$. On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
g	$-\infty$	↗	-1	↘	-5	↗	$+\infty$

b) $g(3)=14$

c) Sur $]-\infty\,;1]$, le maximum de g est -1. Donc l'équation $g(x)=0$ n'a pas de solution sur cet intervalle.

Sur $[1\,;+\infty[$, la fonction g est continue et strictement croissante.

$$\left.\begin{array}{l} g(1)=-5 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty \end{array}\right\} \quad 0\in[-5\,;+\infty[$$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaire, l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution dans $[1\,;+\infty[$, et donc dans $\mathbb{R}$.

d) A l'aide de la calculatrice, on obtient $\alpha\approx 2{,}10$. (On peut utiliser la fonction **G-Solv → X-CAL** sur Casio)

e) Compte tenu des variations de g et des questions précédentes, on obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
g		$-$	0	$+$	

2) a) $f'(x)=\dfrac{6x^2(x^2-1)-2x(2x^3+3)}{(x^2-1)^2}=\dfrac{2x(3x(x^2-1)-(2x^3+3))}{(x^2-1)^2}=\dfrac{2x\,g(x)}{(x^2-1)^2}$.

b) Le signe de *f'* dépend du signe de x et de $g(x)$ (trouvé au 1) e)). On a donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-1		0		1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-3	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

c) Nous savons que $g(\alpha)=0$. Donc $\alpha^3-3\alpha-3=0$ et ainsi $\alpha^3=3\alpha+3$.

$$f(\alpha)=\frac{2\alpha^3+3}{\alpha^2-1}=\frac{6\alpha+9}{\alpha^2-1}=\frac{3(2\alpha+3)}{\alpha^2-1}$$

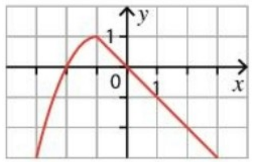
Étudier la continuité :

On considère la fonction *f*, définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\begin{cases} -x^2-2x & \text{si } x\le -1 \\ -x & \text{si } x>-1 \end{cases}$

1) Tracer la courbe représentative de f dans un repère.
2) Étudier la continuité de *f* :
a) sur $]-\infty\,;-1]$ **b)** sur $]-1\,;+\infty[$ **c)** en -1

Solution :

1)



2)
a) La fonction $x\to -x^2-2x$ est une fonction polynôme, donc elle est continue sur $\mathbb{R}$ et donc sur $]-\infty\,;-1]$.
b) La fonction $x\to -x$ est une fonction affine, donc elle est continue sur $\mathbb{R}$ et donc sur $]-1\,;+\infty[$.
c) Nous avons $f(-1)=-(-1)^2-2\times(-1)=1$. Ensuite,
d'une part $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} -x^2-2x=-(-1)^2-2\times(-1)=1$,
d'autre part $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} -x=-(-1)=1$.

Ainsi, $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)=f(-1)=1$, donc *f* est continue en -1.

Tangente et position relative :

On considère la fonction *f*, définie sur $[0;6]$ par : $f(x)=x^3-12x^2+36x$.
1) Déterminer l'équation de la tangente *T* à la courbe représentative de la fonction *f* au point d'abscisse 4.
2) Démontrer que $f(x)-(-12x+64)=(x-4)^3$.
3) En déduire la position relative de la courbe représentative de la fonction *f* par rapport à la tangente *T*.

Solution :

1) Pour déterminer l'équation de la tangente, nous avons besoin de *f'* : $f'(x)=3x^2-24x+36$.
$f(4)=4^3-12\times4^2+36\times4=16$
$f'(4)=3\times4^2-24\times4+36=-12$
On a donc :
$T:\ y=f'(4)(x-4)+f(4)=-12(x-4)+16=-12x+64$.

2) $f(x)-(-12x+64)=x^3-12x^2+36x+12x-64=x^3-12x^2+48x-64$.
Or, $(x-4)^3=(x-4)^2\times(x-4)=(x^2-8x+16)(x-4)=x^3-12x^2+48x-64$.
Nous avons donc bien $f(x)-(-12x+64)=(x-4)^3$

3) Pour étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et *T*, il nous faut étudier le signe de $f(x)-(-12x+64)$:

$f(x)-(-12x+64)=(x-4)^3$. Le signe de $(x-4)^3$ est le même que celui de $x-4$:

x	0		4		6
$x-4$		$-$	0	$+$	

Donc, sur $[0;4]$, $\mathscr{C}_f$ est située en dessous de *T* et sur $[4;6]$, $\mathscr{C}_f$ est située au dessus de *T*.