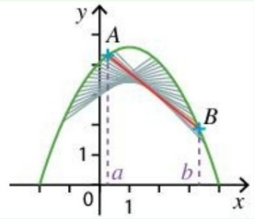
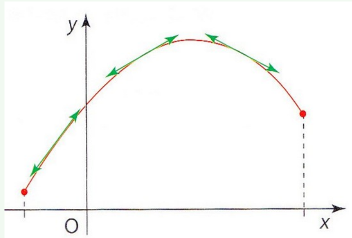
Fonction concave

Définition :

La fonction f est dite **concave** sur l'intervalle I si, pour tous réels a et b de I, la portion de la courbe située entre les points $A(a;f(a))$ $B(b;f(b))$ est **au-dessus de la sécante (AB)**.



La fonction f est dite **concave** sur l'intervalle I si sa courbe représentative est entièrement située **en-dessous de chacune de ses tangentes**.



Lien avec la fonction dérivée f' :

La fonction f est **concave** sur I si, et seulement si, sa fonction dérivée **f' est décroissante** sur I.

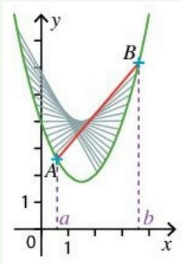
Lien avec la fonction dérivée seconde f'' :

La fonction f est **concave** sur I si, et seulement si, pour tout réel $x \in I$, $f''(x) \leq 0$.

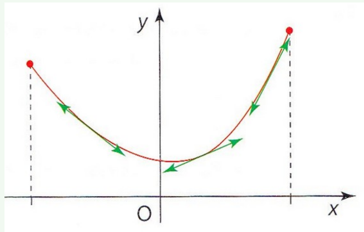
Fonction convexe

Définition :

La fonction f est dite **convexe** sur l'intervalle I si, pour tous réels a et b de I, la portion de la courbe située entre les points $A(a;f(a))$ $B(b;f(b))$ est **en-dessous de la sécante (AB)**.



La fonction f est dite **convexe** sur l'intervalle I si sa courbe représentative est entièrement située **au-dessus de chacune de ses tangentes**.



Lien avec la fonction dérivée f' :

La fonction f est **convexe** sur I si, et seulement si, sa fonction dérivée **f' est croissante** sur I.

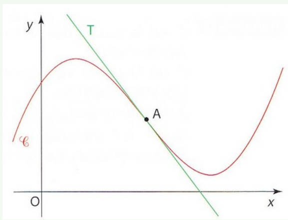
Lien avec la fonction dérivée seconde f'' :

La fonction f est **convexe** sur I si, et seulement si, pour tout réel $x \in I$, $f''(x) \geq 0$.

Point d'inflexion :

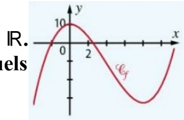
Un **point d'inflexion** d'une courbe est un point en lequel la courbe traverse la tangente.

Le point A d'abscisse a est un **point d'inflexion** de la courbe C_f si, et seulement si, la dérivée seconde **f'' s'annule en a en changeant de signe**.



Lecture graphique :

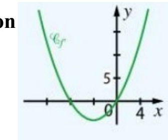
1) On donne sur le graphique 1 la courbe représentative d'une fonction f définie sur ℝ. Déterminer les intervalles sur lesquels la fonction f est convexe et les intervalles sur lesquels elle est concave.



Graphique 1

Solution :
Par lecture graphique, f est concave sur $]-\infty;4]$ et convexe sur $[4;+\infty[$.

2) On donne sur le graphique 2 la courbe représentative de la fonction dérivée d'une fonction f définie sur ℝ. Déterminer les intervalles sur lesquels la fonction f est convexe et concave.



Graphique 2

Solution :
f est concave lorsque sa dérivée est décroissante soit sur l'intervalle $]-\infty;-4]$.
f est convexe lorsque sa dérivée est croissante, soit sur l'intervalle $[-4;+\infty[$.

Étude de convexité :

1) On considère la fonction f définie sur ℝ par $f(x)=e^x$ et on note C_f sa courbe représentative.
- **a) Étudier la convexité de f.**
- **b) Déterminer une équation de la tangente T à C_f en son point d'abscisse 0.**
- **c) En déduire que quel que soit le réel x : $e^x \geq x+1$**

Solution :
a) $f''(x)=f'(x)=e^x>0$, donc f est convexe sur ℝ.
b) $T:\ y=f'(0)(x-0)+f(0) \Leftrightarrow y=x+1$
c) La fonction f est convexe sur ℝ. Sa courbe représentative est donc au-dessus de toutes ses tangentes sur ℝ. Elle est, en particulier, au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 0, d'où $e^x \geq x+1$

2) On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{1+x}$ et on note C_f sa courbe représentative.
- **a) Étudier la convexité de f.**
- **b) Déterminer une équation de la tangente T à C_f en son point d'abscisse 0.**
- **c) En déduire que quel que soit le réel x de $[0;+\infty[$: $\sqrt{1+x} \leq 1+0{,}5\,x$**

Solution :
a) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$, et $f''(x)=-\dfrac{1}{4(1+x)\sqrt{1+x}}$
Sur $[0;+\infty[$, $\sqrt{1+x} \geq 0$, $1+x \geq 0$, donc $f''(x) \leq 0$ et f est concave.

b) $T:\ y=f'(0)(x-0)+f(0) \Leftrightarrow y=\dfrac{1}{2}x+1$
c) La fonction f est concave sur $[0;+\infty[$. Sa courbe représentative est donc en-dessous de toutes ses tangentes sur $[0;+\infty[$. Elle est, en particulier, en-dessous de sa tangente au point d'abscisse 0, d'où $\sqrt{1+x} \leq 1+0{,}5\,x$

3) En utilisant la convexité de la fonction exponentielle, démontrer que pour tout réels a et b : $e^{\frac{a+b}{2}} \leq \dfrac{e^a+e^b}{2}$

Solution :

Soit les points $A(a;e^a)$ $B(b;e^b)$. La fonction exponentielle étant convexe, le segment $[AB]$ est situé au-dessus de la courbe représentative de la fonction exponentielle. En particulier, le milieu de ce segment de coordonnées $\left(\dfrac{a+b}{2};\dfrac{e^a+e^b}{2}\right)$ est au-dessus du point de la courbe ayant la même abscisse $\left(\dfrac{a+b}{2};e^{\frac{a+b}{2}}\right)$. On a donc $e^{\frac{a+b}{2}} \leq \dfrac{e^a+e^b}{2}$.