Le cours – T° spé : Droite dans l'espace

Représentation paramétrique de droite :

Soit une droite (d) passant par un point $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$

On a : $M(x;y;z)\in(d)$ $\Leftrightarrow$ Il existe un réel t tel que $\begin{cases}x=x_A+at\\y=y_A+bt\\z=z_A+ct\end{cases}$

Ce système s'appelle une **représentation paramétrique** de la droite (d).

Les méthodes – T° spé : Droite dans l 'espace

Utiliser les représentations paramétriques de droites :

On considère la droite (d) de représentation paramétrique $\begin{cases}x=5-t\\y=-1+3t\\z=1+t\end{cases}$, avec $t\in\mathbb{R}$.

a) Le point $A(3;5;-2)$ appartient-il à la droite (d) ?
b) Donner les coordonnées de 2 points de (d), ainsi que celles de 2 vecteurs directeurs de (d).
c) (d) est-elle parallèle à la droite (d') de représentation paramétrique $\begin{cases}x=6+2k\\y=1-6k\\z=-5-2k\end{cases}$, avec $k\in\mathbb{R}$?

Solution :

a) Le point A appartient à (d) si, et seulement si, il existe un réel t tel que $\begin{cases}x_A=5-t\\y_A=-1+3t\\z_A=1+t\end{cases}$, ce qui équivaut à $\begin{cases}3=5-t\\5=-1+3t\\-2=1+t\end{cases}$, soit à $\begin{cases}t=2\\t=2\\t=-3\end{cases}$. Ceci implique qu'il n'existe pas de réel t vérifiant les trois équations : on en déduit que le point A n'appartient pas à la droite (d).

b) Pour $t=0$, on a le point $B(5;-1;1)$. Pour $t=1$, on a le point $C(4;2;2)$. Un vecteur directeur $\vec{u_1}$ a pour coordonnées $\vec{u_1}\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$. Tout vecteur colinéaire à $\vec{u_1}$ est un vecteur directeur. Par exemple $\vec{u_2}=2\vec{u_1}\begin{pmatrix}-2\\6\\2\end{pmatrix}$.

c) Un vecteur directeur de (d') a pour coordonnées $\vec{u'}\begin{pmatrix}2\\-6\\-2\end{pmatrix}$. On remarque que $\vec{u'}=-2\vec{u_1}$. Comme les vecteurs directeurs sont colinéaires, les deux droites sont parallèles.

Déterminer l'intersection de 2 droites :

On considère les droites (d) et (d') de représentations paramétriques :
$\begin{cases}x=3+2t\\y=-1-t\\z=4+3t\end{cases}$, **avec** $t\in\mathbb{R}$ **et** $\begin{cases}x=1-3k\\y=1+k\\z=2-5k\end{cases}$, **avec** $k\in\mathbb{R}$.
Démontrer que ces deux droites sont sécantes en un point A dont on déterminera les coordonnées.

Solution :

Les deux droites ne sont pas parallèles car leurs vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires.
Les deux droites sont alors sécantes si, et seulement si, il existe un couple $(t;k)$ de réels solution du système $\begin{cases}3+2t=1-3k\\-1-t=1+k\\4+3t=2-5k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2t+3k=-2\\-t-k=2\\3t+5k=-2\end{cases}$.
Avec les deux premières équations, nous obtenons :
$\begin{cases}2t+3k=-2\\-t-k=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2t+3k=-2\\-2t-2k=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2t+3k=-2\\k=2\end{cases}$ ($L_2=L_1+L_2$). On a alors $t=-4$ et $k=2$.
On vérifie si la dernière égalité est vérifiée par ces deux valeurs : $3t+5k=3\times(-4)+5\times2=-2$ ce qui convient.
Les deux droites sont donc sécantes. Le point A est le point de (d) de paramètre -4 et le point de (d') de paramètre 2.
$\begin{cases}x_A=1-3\times2\\y_A=1+2\\z_A=2-5\times2\end{cases}$ d'où $A(-5;3;-8)$

Démontrer que 2 droites sont non coplanaires :

On considère les droites (d) et (d') de représentations paramétriques :
$\begin{cases}x=3+2t\\y=-1-t\\z=4+3t\end{cases}$, **avec** $t\in\mathbb{R}$ **et** $\begin{cases}x=1-3k\\y=1+k\\z=3-5k\end{cases}$, **avec** $k\in\mathbb{R}$.
Démontrer que ces deux droites sont non coplanaires.

Solution :

Les deux droites ne sont pas parallèles car leurs vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires.
Les deux droites sont alors sécantes si, et seulement si, il existe un couple $(t;k)$ de réels solution du système $\begin{cases}3+2t=1-3k\\-1-t=1+k\\4+3t=3-5k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2t+3k=-2\\-t-k=2\\3t+5k=-1\end{cases}$.
Avec les deux premières équations, nous obtenons :
$\begin{cases}2t+3k=-2\\-t-k=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2t+3k=-2\\-2t-2k=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2t+3k=-2\\k=2\end{cases}$ ($L_2=L_1+L_2$). On a alors $t=-4$ et $k=2$.
On vérifie si la dernière égalité est vérifiée par ces deux valeurs : $3t+5k=3\times(-4)+5\times2=-2\neq-1$.
La dernière égalité n'est pas vérifiée. Les droites ne sont donc pas sécantes et en conséquence sont non coplanaires.

Autres méthodes, astuces, notions… rencontrées :