Le cours – T° spé : Équations différentielles

Prérequis : Primitives

y' = ay :

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' = a\,y$ est l'ensemble des fonctions $x \mapsto C\,e^{ax}$, où C est une constante réelle quelconque.

y' = ay + b :

L'ensemble des solutions dans ℝ de l'équation différentielle $y' = a\,y + b$ est l'ensemble des fonctions $x \mapsto C\,e^{ax} - \frac{b}{a}$, où C est une constante réelle quelconque.

y' = ay + f :

Soit a un réel et f une fonction définie sur un intervalle I.
Toute solution dans I de l'équation différentielle (**E**) $y' = a\,y + f$ est la somme d'une **solution quelconque de l'équation $y' = a\,y$** et d'une **solution particulière** de l'équation (**E**).

Les méthodes – T° spé : Équations différentielles

Résolution d'une équation différentielle de la forme y' = ay :

1) Résoudre l'équation différentielle (E) $y' = -4y$.
2) Déterminer la solution f de (E) telle que $f(2) = 1$.

Solution :

1) Les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions $x \mapsto C\,e^{-4x}$.

2) Nous cherchons C telle que $C\,e^{-4\times 2} = 1$ qui donne $C = e^8$. La solution recherchée est donc la fonction $f(x) = e^8 \times e^{-4x} = e^{-4x+8}$.

Résoudre une équation différentielle de la forme y' = ay + b :

1) Résoudre l'équation différentielle (E) $y' = 3y - 2$.
2) Déterminer la solution f de (E) telle que $f(1) = 0$.

Solution :

1) Les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions $x \mapsto C\,e^{3x} - \frac{-2}{3}$ soit $x \mapsto C\,e^{3x} + \frac{2}{3}$.

2) Nous cherchons C telle que $C\,e^{3\times 1} + \frac{2}{3} = 0$ qui donne $C = -\frac{2}{3}e^{-3}$. La solution recherchée est donc la fonction

$f(x) = -\frac{2}{3}e^{-3} \times e^{3x} + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}(1 - e^{3x-3})$.

Résoudre une équation différentielle de la forme y' = ay + f :

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}x$.

1) Vérifier que la fonction g définie sur ℝ par $g(x) = -x - 2$ est solution de l'équation (E).
2) En déduire toutes les solutions de l'équation (E) sur ℝ.
3) En déduire l'unique solution h de (E) telle que $h(2) = 0$.

Solution :

1) Vérifions que g est solution : $g' - \frac{1}{2}g = -1 - \frac{1}{2}(-x-2) = -1 + \frac{1}{2}x + 1 = \frac{1}{2}x$. La fonction g est solution de (E).

2) L'équation (E) s'écrit $y' = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}x$. Les solutions de l'équation différentielle $y' = \frac{1}{2}y$ sont les fonctions $x \mapsto C\,e^{\frac{1}{2}x}$. De plus nous savons que g est une solution particulière de (E). Nous en déduisons que les solutions de (E) sont les fonctions $x \mapsto C\,e^{\frac{1}{2}x} - x - 2$.

3) Nous cherchons C telle que : $C\,e^{\frac{1}{2}\times 2} - 2 - 2 = 0$ qui donne $C = \frac{4}{e}$. La solution recherchée est donc la fonction

$h(x) = \frac{4}{e}e^{\frac{1}{2}x} - x - 2 = 4e^{\frac{1}{2}x-1} - x - 2$

Autres méthodes, astuces, notions… rencontrées :