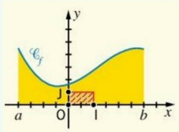
Le cours – T° spé : Intégrales

Prérequis : Primitives

Définition :

Si f est **positive** sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$, on appelle **intégrale de f sur $[a\ ;\ b]$** l'aire, exprimée en u.a., de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



Cette aire est également appelée « **aire sous la courbe** ». L'intégrale de la fonction f sur $[a\ ;\ b]$ se note : $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$

Théorème fondamental :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.

La fonction F définie sur $[a\ ;\ b]$ par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur $[a\ ;\ b]$ et sa dérivée est la fonction f.

Calcul d'une intégrale :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels de I et F une primitive de f sur $[a\ ;\ b]$. Alors,

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Propriétés :

$$\int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0 \qquad \int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b) = -(F(b) - F(a)) = -\int_a^b f(x)dx$$

Relation de Chasles : $\displaystyle\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

Linéarité : $\displaystyle\int_a^b k\,f(x)dx = k\times\int_a^b f(x)dx$ et $\displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

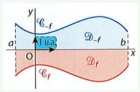
Positivité et comparaison :

Si pour tout x de $[a;b]$, $f(x) \geq 0$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 0$

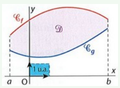
Si pour tout x de $[a;b]$, $f(x) \geq g(x)$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

Calculs d'aires :

Aire d'une fonction continue **négative** : si f est **négative** sur [a ; b], alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -aire(D_f)$.



Aire d'un domaine **entre deux courbes** : Si $\mathscr{C}_f$ **est au dessus** de $\mathscr{C}_g$ sur [a ; b], alors l'aire du domaine D délimité par $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sur [a ; b] est $aire(D) = \displaystyle\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx$.



Valeur moyenne :

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Intégration par parties :

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, et dont les dérivées sont continues sur I ; a et b deux réels de I.

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$$

Les méthodes – T° spé : Intégrales

Étudier une fonction définie par une intégrale (théorème fondamental) :

Soit F le fonction définie sur $[-2\,;+\infty[$ par $F(x) = \displaystyle\int_{-2}^x \sqrt{t+2}\,dt$.

1) Donner une interprétation graphique de $F(2)$ et $F(3)$, puis conjecturer la comparaison de ces deux nombres.
2) Déterminer la dérivée de la fonction F sur $[-2\,;+\infty[$.
3) Étudier le sens de variation de F sur $[-2\,;+\infty[$ puis valider la conjecture du 1).

Solution :

1) La fonction $f(x) = \sqrt{t+2}$ est positive sur $[-2\,;+\infty[$. $F(2) = \displaystyle\int_{-2}^2 \sqrt{t+2}\,dt$ représente donc l'aire délimitée par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation x = -2 et x = 2. $F(3) = \displaystyle\int_{-2}^3 \sqrt{t+2}\,dt$ représente donc l'aire délimitée par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation x = -2 et x = 2. Nous pouvons donc conjecturer que $F(3) \geqslant F(2)$

2) D'après le théorème fondamental, $F'(x) = f(x) = \sqrt{x+2}$.

3) Nous savons que sur $[-2\,;+\infty[$, $\sqrt{x+2} \geqslant 0$, donc $F'(x) \geqslant 0$. La fonction F est donc croissante. Nous avons donc bien $F(3) \geqslant F(2)$.

Calculer une intégrale avec les primitives :

Calculer $I = \displaystyle\int_{-1}^0 e^{3x+1}\,dx$.

Solution :

$f(x) = e^{3x+1}$ admet pour primitive $F(x) = \dfrac{1}{3}e^{3x+1}$. Nous avons donc :

$$I = \int_{-1}^0 e^{3x+1}\,dx = \left[\frac{1}{3}e^{3x+1}\right]_{-1}^0 = \frac{1}{3}e^{3\times 0+1} - \frac{1}{3}e^{3\times(-1)+1} = \frac{1}{3}e - \frac{1}{3}e^{-2} = \frac{1}{3}(e - e^{-2})$$

Comparer deux intégrales :

1) Démontrer que, pour tout réel x de $[0\,;1]$, $0 \leqslant e^{x^2} \leqslant e^x$.

2) En déduire que $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 e^{x^2}dx \leqslant e-1$.

Solution :

1) Sur l'intervalle $[0\,;1]$, nous avons : $0 \leqslant x^2 \leqslant x$ et donc $0 \leqslant e^0 \leqslant e^{x^2} \leqslant e^x$.

2) Nous savons que $0 \leqslant e^{x^2} \leqslant e^x$. En intégrant chaque terme entre 0 et 1, nous obtenons : $\displaystyle\int_0^1 0\,dx \leqslant \int_0^1 e^{x^2}dx \leqslant \int_0^1 e^x dx$. Or $\displaystyle\int_0^1 0\,dx = 0$ et $\displaystyle\int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e-1$. Ainsi, $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 e^{x^2}dx \leqslant e-1$.

Calculer une intégrale en utilisant une IPP :

Calculer $I = \int_0^{\ln 2} (x-1)e^x \, dx$.

Solution :

On pose $u(x) = x-1$ et $v'(x) = e^x$. Nous avons donc $u'(x) = 1$ et $v(x) = e^x$. Nous obtenons donc par IPP :

$$I = \int_0^{\ln 2} (x-1)e^x \, dx = \left[(x-1)\times e^x\right]_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2} e^x \, dx = \left[(x-1)\times e^x\right]_0^{\ln 2} - \left[e^x\right]_0^{\ln 2} = (\ln 2-1)\times 2-(-1)-(2-1)$$
$$= 2\ln 2-2+1-1 = 2\ln 2-2$$

Calculer l'aire entre deux courbes :

Soit f et g les fonctions définies sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^3$ dont les courbes représentatives dans un repère orthonormé sont notées $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

1) Préciser la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle $[0\,;1]$.
2) Calculer l'aire, en u.a., de la surface délimitée par $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Solution :

1) $f(x) - g(x) = x^2 - x^3 = x^2(1-x) \geqslant 0$ sur $[0\,;1]$. Donc $\mathscr{C}_f$ est au dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $[0\,;1]$.
2) $\mathscr{A} = \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x^2dx - \int_0^1 x^3\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 - \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}\,u.a.$

Calculer la valeur moyenne d'une fonction :

Lors d'une épidémie de grippe, le nombre de malades, t jours après l'apparition des premiers cas, est modélisé par la fonction f définie sur $[0\,;6]$ par $f(t) = 6t^2 - t^3$.
Calculer la valeur moyenne m de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;6]$. Interpréter ce résultat.

Solution :

$m = \frac{1}{6-0}\int_0^6 6t^2 - t^3\,dt = \frac{1}{6}\times\left[2t^3 - \frac{t^4}{4}\right]_0^6 = \frac{1}{6}\times\left(2\times 6^3 - \frac{6^4}{4}\right) = 18$. Ce nombre correspond au nombre moyen de malade chaque jour.