Le cours – T° spé : Limites de fonctions

Prérequis : fonction exponentielle, limites de suites, compléments fonctions

Les définitions :

- Les définitions des limites de fonctions en $+\infty$ sont équivalentes à celles des suites (voir limites de suites). On peut énoncer des définitions équivalentes en $-\infty$
- On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ (ou $-\infty$) en A si tout intervalle $]a\,;+\infty[$ (ou $]-\infty\,;b[$), a et b réels, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de A et on note : $\lim\limits_{x\to A} f(x) = +\infty$ (ou $\lim\limits_{x\to A} f(x) = -\infty$).
- La droite d'équation **$y = L$ est asymptote horizontale** à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$ (ou $-\infty$) si
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \text{ (ou } \lim_{x\to-\infty} f(x) = L)$$
- La droite d'équation **$x = A$ est asymptote verticale** à la courbe représentative de la fonction f si
$$\lim_{x\to A} f(x) = -\infty \text{ ou } \lim_{x\to A} f(x) = +\infty$$

Limites des fonctions usuelles :

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

Opérations sur les limites, formes indéterminées et composition :

Les tableaux des opérations sur les limites sont les mêmes que pour les suites (voir limites de suites). Voici quelques résultats d'opérations (attention à l'abus d'écriture à ne pas écrire sur une copie!) :

$"(-\infty)\times(-\infty)" \to +\infty$ $\quad$ $"\frac{0^+}{-\infty}" \to 0^-$ $\quad$ $"\frac{3}{+\infty}" \to 0^+$ $\quad$ $"\frac{+\infty}{0^-}" \to -\infty$ $\quad$ $"\frac{5}{0^+}" \to +\infty$

Les 4 formes indéterminées à connaître par cœur :

$"(+\infty)-(+\infty)"$ $\quad$ $"0\times\infty"$ $\quad$ $"\frac{\infty}{\infty}"$ $\quad$ $"\frac{0}{0}"$

Composition de fonctions :

a, b et c désignent des nombres réels ou $+\infty$ ou $-\infty$. f et g sont des fonctions.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{X\to b} g(X) = c$, alors $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = c$

Théorèmes de comparaison et des gendarmes :

Théorèmes de comparaison et des gendarmes pour les fonctions identiques à ceux des suites (voir limites de suites). On a les théorèmes analogues en $-\infty$.

Croissances comparées pour la fonction exponentielle :

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty,\ n\geq 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0,\ n\geq 1$$

$$\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1$$

Les méthodes – T° spé : Limites de fonctions

Étude asymptotique d'une fonction :

Soit la fonction f définie sur $]-\infty\,;3[\cup]3\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. En déduire les éventuelles asymptotes.

Limite en $+\infty$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x+1 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x-3 = +\infty\end{array}\right\}$$ **Par quotient, nous avons une forme indéterminée**

$$f(x) = \frac{x+1}{x-3} = \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1-\frac{3}{x}\right)} = \frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{3}{x}}$$

NE PAS OUBLIER DE SIMPLIFIER !!

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right) = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1-\frac{3}{x}\right) = 1\end{array}\right\}$$ **Par quotient**, nous obtenons finalement :
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

La droite d'équation **$y = 1$ est donc asymptote horizontale** à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$.

Limite en $-\infty$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} x+1 = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x-3 = -\infty\end{array}\right\}$$ **Par quotient, nous avons une forme indéterminée**

$$f(x) = \frac{x+1}{x-3} = \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1-\frac{3}{x}\right)} = \frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{3}{x}}$$

NE PAS OUBLIER DE SIMPLIFIER !!

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right) = 1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \left(1-\frac{3}{x}\right) = 1\end{array}\right\}$$ **Par quotient**, nous obtenons finalement :
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$$

La droite d'équation **$y = 1$ est donc asymptote horizontale** à la courbe représentative de la fonction f en $-\infty$.

Limite en 3 à gauche :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} x+1 = 4 \\ \lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} x-3 = 0^-\end{array}\right\}$$ **Par quotient**, nous obtenons :
$$\lim_{\substack{x\to3\\x<3}} f(x) = -\infty$$

Ici, il ne faut pas oublier le signe du 0.
C'est lui qui détermine le signe de la limite !

Limite en 3 à droite:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} x+1 = 4 \\ \lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} x-3 = 0^+\end{array}\right\}$$ **Par quotient**, nous obtenons :
$$\lim_{\substack{x\to3\\x>3}} f(x) = +\infty$$

La droite d'équation **$x = 3$ est donc asymptote verticale** à la courbe représentative de la fonction f (à gauche et à droite).

Limites de fonctions composées :

1) Soit la fonction f définie sur ℝ par $f(x)=e^{2x^2+3}$. Calculer la limites de f en $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^2+3=+\infty$, $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

2) Soit la fonction f définie sur ℝ par $f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{x^4+1}}$. Calculer la limites de f en $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^4+1=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^4+1}=0$. $\lim\limits_{X\to0}\sqrt{X}=0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

Utiliser les théorèmes de comparaison et des gendarmes :

1) Soit la fonction f définie sur ℝ par $f(x)=e^x\cos(x)$. Calculer la limites de f en $-\infty$.

$\cos(x)$ n'a pas de limite en $-\infty$. On ne peut donc pas calculer la limite de f directement avec les opérations.

Nous savons que $-1\le\cos(x)\le1$, donc $-e^x\le e^x\cos(x)\le e^x$.

Or $\lim\limits_{x\to-\infty} -e^x=\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$, donc **d'après le théorème des gendarmes**, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.

1) Soit la fonction f définie sur ℝ par $f(x)=x^2-\sin(x)$. Calculer la limites de f en $+\infty$.

$\sin(x)$ n'a pas de limite en $+\infty$. On ne peut donc pas calculer la limite de f directement avec les opérations.

Nous savons que $-1\le\sin(x)\le1$, donc $x^2-1\le x^2-\sin(x)\le x^2+1$. En particulier, $x^2-1\le x^2-\sin(x)$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-1=+\infty$, donc **d'après le théorème de comparaison**, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Lever une indétermination en utilisant les croissances comparées :

1) Soit la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{e^x+x}{e^x-x^2}$. Calculer la limites de f en $+\infty$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} -x^2=-\infty\end{array}\right\}$$ Par somme, nous avons une forme indéterminée au dénominateur

$$f(x)=\frac{e^x+x}{e^x-x^2}=\frac{e^x\left(1+\frac{x}{e^x}\right)}{e^x\left(1-\frac{x^2}{e^x}\right)}=\frac{1+\frac{x}{e^x}}{1-\frac{x^2}{e^x}}$$

NE PAS OUBLIER DE SIMPLIFIER !!

D'après le cours, nous savons que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ donc que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{e^x}{x}}=0$.

De même, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{e^x}{x^2}}=0$. Ainsi :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x}{e^x}\right)=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{x^2}{e^x}\right)=1\end{array}\right\}$$ Par quotient, nous obtenons finalement :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$$

2) Soit la fonction f définie par $f(x)=xe^{4x}$. Calculer la limites de f en $-\infty$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{4x}=0\end{array}\right\}$$ Par produit, nous avons une forme indéterminée

$f(x)=xe^{4x}=\dfrac{1}{4}\times4xe^{4x}$. En posant $X=4x$, nous avons $f(x)=\dfrac{1}{4}\times Xe^X$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} X=-\infty$.

Or, d'après le cours, nous savons que $\lim\limits_{X\to-\infty} Xe^X=0$.

Nous pouvons en déduire que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.

3) Soit la fonction f définie par $f(x)=2x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$. Calculer la limites de f en $+\infty$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 2x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0\text{ , donc }\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}}=1\text{ et }\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}}-1=0\end{array}\right\}$$ Par produit, nous avons une forme indéterminée

$f(x)=2x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)=2\times\dfrac{\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)}{\frac{1}{x}}$. En posant $X=\dfrac{1}{x}$, nous avons $f(x)=2\times\dfrac{e^X-1}{X}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} X=0$.

Or, d'après le cours, nous savons que $\lim\limits_{X\to0}\dfrac{e^X-1}{X}=1$.

Nous pouvons en déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$.

Autres méthodes, astuces, notions… rencontrées :