Le cours – T° spé : Limites de suites définies explicitement

Prérequis : généralités suites ; suites arithmétiques et géométriques

Les définitions :

- On dit que la suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ si **tout** intervalle $]A;+\infty[$, A réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
- On dit que la suite (u_n) admet pour limite $-\infty$ si **tout** intervalle $]-\infty;A[$, A réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$
- On dit que la suite (u_n) admet pour limite L si **tout** intervalle ouvert contenant L contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$. Une telle suite est dite **convergente**.

Limites des suites usuelles :

$\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2=+\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}=+\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} n^k=+\infty$ (pour $k\geqslant 1$)

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}=0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}=0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}=0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^k}=0$ (pour $k\geqslant 1$)

Opérations sur les limites et formes indéterminées :

Les tableaux des opérations sur les limites ne sont pas à apprendre par cœur, mais à bien comprendre ! Voici quelques résultats d'opérations (attention à l'abus d'écriture à ne pas écrire sur une copie!) :

"$(-\infty)\times(-\infty)$" $\to +\infty$ "$\frac{0^+}{-\infty}$" $\to 0^-$ "$\frac{3}{+\infty}$" $\to 0^+$ "$\frac{+\infty}{0^-}$" $\to -\infty$ "$\frac{5}{0^+}$" $\to +\infty$

Les formes indéterminées à connaître par cœur

"$(+\infty)-(+\infty)$" "$0\times\infty$" "$\frac{\infty}{\infty}$" "$\frac{0}{0}$"

2 méthodes pour lever une indétermination : **1)** factorisation par les plus hauts degrés **2)** méthode du "conjugué"

Limites de q^n :

	$q\leq -1$	$-1<q<1$	$q=1$	$q>1$
$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n =$	Pas de limite	0	1	$+\infty$

Théorèmes de comparaison et des gendarmes :

Théorème de comparaison (pour des limites infinies) :

- Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ et, à partir d'un certain rang $v_n\geq u_n$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} v_n=+\infty .$$

- Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$ et, à partir d'un certain rang $v_n\leq u_n$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} v_n=-\infty .$$

Théorème des gendarmes (pour des limites finies) :

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que, à partir d'un certain rang $u_n\leqslant v_n\leqslant w_n$.
Si (u_n) et (w_n) convergent vers le réel L, alors (v_n) converge vers L.

Les méthodes – T° spé : Limites de suites définies explicitement

Calculs de limites simples :

1) Calculer la limite de la suite (u_n) définie par : $u_n=\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+2\right)\left(-n^3+1\right)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}=+\infty$, donc par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0^+$ et ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+2\right)=2$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^3=+\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^3=-\infty$ et ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-n^3+1\right)=-\infty$

Par produit, nous obtenons : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+2\right)\left(-n^3+1\right)=-\infty$

2) Calculer la limite de la suite (u_n) définie par : $u_n=\frac{4}{n^2+5}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} 4=4$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2=+\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2+5\right)=+\infty$

Par quotient, nous obtenons : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4}{n^2+5}=0^+$

3) Calculer la limite de la suite (u_n) définie par : $u_n=0{,}6^n-5^n$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}6^n=0$ car $-1<0{,}6<1$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 5^n=+\infty$ car $5>1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -5^n=-\infty$

Par somme, nous obtenons : $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}6^n-5^n=-\infty$

Lever une indétermination :

1) Calculer la limite de la suite (u_n) définie par : $u_n=2n^2-3n+2$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} 2n^2=+\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} -3n+2=-\infty$

Par somme, nous avons une forme indéterminée

$u_n=2n^2-3n+2=n^2\left(2-\frac{3n}{n^2}+\frac{2}{n^2}\right)=n^2\left(2-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right)$ **NE PAS OUBLIER DE SIMPLIFIER !!**

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2=+\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{n^2}=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3}{n}=0$, ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right)=2$

Par produit, nous obtenons : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$

2) Calculer la limite de la suite (u_n) définie par : $u_n=\frac{3n+1}{n^2+5}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} 3n+1=+\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2+5=+\infty$

Par quotient, nous avons une forme indéterminée

$u_n=\frac{3n+1}{n^2+5}=\frac{n\left(3+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{5}{n^2}\right)}=\frac{\left(3+\frac{1}{n}\right)}{n\left(1+\frac{5}{n^2}\right)}$ **NE PAS OUBLIER DE SIMPLIFIER !!**

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(3+\frac{1}{n}\right)=3$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{5}{n^2}\right)=1$, ainsi par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(1+\frac{5}{n^2}\right)=+\infty$

Par quotient, nous obtenons finalement :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0^+$

3) Calculer la limite de la suite (u_n) définie par : $u_n=n-\sqrt{n}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} -\sqrt{n}=-\infty$

Par somme, nous avons une forme indéterminée

$$u_n=n-\sqrt{n}=n\left(1-\frac{\sqrt{n}}{n}\right)=n\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

NE PAS OUBLIER DE SIMPLIFIER : $\frac{\sqrt{n}}{n}=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\times\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}=0$, ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=1$

Par produit, nous obtenons :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$

4) Calculer la limite de la suite (u_n) définie par : $u_n=3^n-5^n$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n=+\infty$ car $3>1$,

$\lim\limits_{n\to+\infty} 5^n=+\infty$ car $5>1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -5^n=-\infty$

Par somme, nous avons une forme indéterminée

$$u_n=3^n-5^n=5^n\left(\frac{3^n}{5^n}-1\right)=5^n\left(\left(\frac{3}{5}\right)^n-1\right)$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 5^n=+\infty$ car $5>1$,

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n=0$ car $-1<\frac{3}{5}<1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{3}{5}\right)^n-1\right)=-1$

Par produit, nous obtenons finalement :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$

5) Calculer la limite de la suite (u_n) définie par : $u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n+3}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1}=+\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} -\sqrt{n+3}=-\infty$

Par somme, nous avons une forme indéterminée

$$u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n+3}=\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n+3}\right)\times\frac{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+3}\right)}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+3}\right)}=\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n+3}\right)\times\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+3}\right)}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+3}\right)}=\frac{(n+1)-(n+3)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+3}}$$

$$u_n=\frac{-2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+3}}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} -2=-2$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1}+\sqrt{n+3}=+\infty$

Par quotient, nous obtenons finalement :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$

Utiliser le théorème de comparaison :

Calculer la limite de la suite (u_n) définie par : $u_n=n^3+(-1)^n$.

$(-1)^n$ n'a pas de limite. On ne peut donc pas calculer la limite de (u_n) directement avec les opérations.

Nous savons que $-1\le(-1)^n\le1$, donc $n^3-1\le n^3+(-1)^n\le n^3+1$. En particulier, $n^3-1<n^3+(-1)^n$.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3-1=+\infty$, donc **d'après le théorème de comparaison**, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$

Utiliser le théorème des gendarmes :

Calculer la limite de la suite (u_n) définie par : $u_n=\frac{1}{\sqrt{n}-\cos(n)}$.

$\cos(n)$ n'a pas de limite. On ne peut donc pas calculer la limite de (u_n) directement avec les opérations.
Nous savons que $-1\le\cos(n)\le1$, donc :

$-1\le\cos(n)\le1$
$1\ge-\cos(n)\ge-1$
$\sqrt{n}+1\ge\sqrt{n}-\cos(n)\ge\sqrt{n}-1$
$\frac{1}{\sqrt{n}+1}\le\frac{1}{\sqrt{n}-\cos(n)}\le\frac{1}{\sqrt{n}-1}$ car $\sqrt{n}+1\ge0$, $\sqrt{n}-1\ge0$ et $\sqrt{n}-\cos(n)\ge0$

or $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}-1}=0$.

Donc **d'après le théorème des gendarmes**, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$.

Autres méthodes, astuces, notions… rencontrées :