Le cours – T° spé : Logarithme népérien

Prérequis : fonction exponentielle, compléments fonctions, limites de fonctions

Premières propriétés :

Pour tout réel a **strictement positif**, $e^x = a \Leftrightarrow x = \ln a$ — $e^x = 5 \Leftrightarrow x = \ln 5$

Pour tout réel a, $\ln(x) = a \Leftrightarrow x = e^a$ — $\ln(x) = -3 \Leftrightarrow x = e^{-3}$

Pour tout réel x **strictement positif**, $e^{\ln x} = x$ — $x = e^{\ln x}$

Pour tout réel x, $\ln(e^x) = x$ — $8 = e^{\ln 8}$

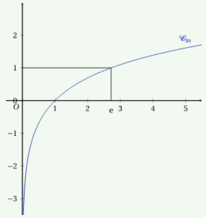
$\ln 1 = 0$ $\quad \ln e = 1$ $\quad \ln \frac{1}{e} = -1$

Fonction logarithme :

La fonction logarithme népérien est **continue et dérivable** sur $]0\,;+\infty[$.

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}\ .$$

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x) = \frac{1}{x}$	‖			$+$			
$f(x) = \ln x$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	1	↗	$+\infty$



Résolution d'équations, inéquations :

$\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$ — $\ln(x+3) = \ln(2) \Leftrightarrow x+3 = 2$

$\ln a \geqslant \ln b \Leftrightarrow a \geqslant b$ — $\ln(2x+1) > \ln(2) \Leftrightarrow 2x+1 > 2$

Tableau de signe :

X	0		1		$+\infty$
Signe de Ln (x)	‖	−	0	+	

Dérivée d'une composée :

Soit u une fonction dérivable et **strictement positive** sur un intervalle I.

$$(\ln u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Relation fonctionnelle et propriétés algébriques :

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$ — $\ln(x) + \ln(x+1) = \ln(x(x+1))$

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$ — $\ln(x+3) - \ln(2) = \ln\left(\frac{x+3}{2}\right)$

$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$ — $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$

$\ln(a^p) = p \ln a$ — $\ln(0{,}6^n) = n \ln(0{,}6)$

$\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$ — $\ln(\sqrt{3}) = \frac{1}{2} \ln(3)$

Limites et croissances comparées :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ $\qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0$ $\qquad \lim\limits_{x \to 0^+} x^n \ln x = 0$ $\qquad \lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Les méthodes – T° spé : Logarithme népérien

Résolutions d'équations, inéquations :

Résoudre $\ln(2x+3) = \ln(x)$

$\ln(2x+3)$ existe si $2x+3>0 \Leftrightarrow x > \frac{-3}{2}$

$\ln(x)$ existe si $x>0$

Le domaine de validité est $D =]0\,;+\infty[$.

Sur ce domaine :

$\ln(2x+3) = \ln(x)$

$\Leftrightarrow 2x+3 = x$

$\Leftrightarrow x = -3$

$-3 \notin D$, donc l'équation n'a pas de solution.

Résoudre $2\ln(x) + 1 = 7$

Le domaine de validité est $D =]0\,;+\infty[$.

Sur ce domaine :

$2\ln(x) + 1 = 7$

$\Leftrightarrow 2\ln(x) = 6$

$\Leftrightarrow \ln(x) = 3$

$\Leftrightarrow x = e^3$

$e^3 \in D$, donc la solution est :

$$S = \{e^3\}$$

Résoudre $e^{x-3} > 5$

$e^{x-3} > 5$

$\Leftrightarrow x-3 > \ln(5)$

$\Leftrightarrow x > \ln(5)+3$

La solution est donc :

$$S =]\ln(5)+3\,;+\infty[$$

Résoudre $\ln(x+3) + \ln(2-x) \geqslant \ln(6)$

$\ln(x+3)$ existe si $x+3>0 \Leftrightarrow x>-3$. $\ln(2-x)$ existe si $2-x>0 \Leftrightarrow x<2$.

Le domaine de validité est $D =]-3\,;2[$.

Sur ce domaine :

$\ln(x+3) + \ln(2-x) \geqslant \ln(6)$

$\Leftrightarrow \ln((x+3)(2-x)) \geqslant \ln(6)$

$\Leftrightarrow (x+3)(2-x) \geqslant 6$

$\Leftrightarrow -x^2 - x + 6 \geqslant 6$

$\Leftrightarrow -x^2 - x \geqslant 0$

$\Leftrightarrow x(x+1) \leqslant 0$

x	-3		-1		0		2
x		$-$	⋮	$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$	⋮	$+$	
$x(x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Avec le tableau de signe, on trouve finalement $S = [-1\,;0]$

Résoudre $0{,}9^n \leqslant 0{,}1$, $n \in \mathbb{N}$

$0{,}9^n \leqslant 0{,}1$

$\Leftrightarrow \ln(0{,}9^n) \leqslant \ln(0{,}1)$

$\Leftrightarrow n \times \ln(0{,}9) \leqslant \ln(0{,}1)$

$\Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}9)}$ car $\ln(0{,}9) \leqslant 0$

Or $\frac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}9)} \approx 21{,}85$. Comme $n \in \mathbb{N}$, la solution est finalement $n \geqslant 22$.

Résoudre $x^{2,7} = 64$, $n \in \mathbb{N}$

$x^{2,7} = 64$

$\Leftrightarrow \ln(x^{2,7}) = \ln(64)$

$\Leftrightarrow 2{,}7 \times \ln(x) = \ln(64)$

$\Leftrightarrow \ln(x) = \frac{\ln(64)}{2{,}7}$

$\Leftrightarrow x = e^{\frac{\ln(64)}{2{,}7}}$

La solution est donc $S = \{e^{\frac{\ln(64)}{2{,}7}}\}$

Simplifications :

Simplifier le nombre $A = \ln(e^3) - \ln\left(\frac{1}{e^2}\right) + 2\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$

$$A = \ln(e^3) - \ln\left(\frac{1}{e^2}\right) + 2\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$$
$$A = 3 + \ln\left(e^2\right) - 2\ln\left(\sqrt{e}\right)$$
$$A = 3 + 2 - 2\times\frac{1}{2}\ln(e)$$
$$A = 3 + 2 - 1 = 4$$

Études de fonctions :

1) Faire l'étude complète de la fonction $f(x) = x^2 - \ln(x)$ **définie sur** $]0\,;+\infty[$ **.**

Limite en 0 :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 = 0^+ \\ \lim\limits_{x\to 0^+} -\ln(x) = +\infty\end{array}\right\}$$

Par somme, nous obtenons :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$$

Limite en $+\infty$ **:**

Par somme, nous avons une **forme indéterminée**. En factorisant par x^2 nous obtenons :

$$f(x) = x^2\left(1 - \frac{\ln(x)}{x^2}\right)$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$ d'après le cours. Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{\ln x}{x^2}\right) = 1$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$. Donc, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Variations :

$f'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2-1}{x}$. Sur $]0\,;+\infty[$, f' est donc du signe de $2x^2 - 1$ (signe simple d'un polynôme du 2nd degré) :

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	↗	$+\infty$

2) Soit g **la fonction définie par** $g(x) = \ln\left(\frac{x+3}{-x+4}\right)$ **.**

a) Déterminer l'ensemble de définition de g**.**
b) Calculer $g'(x)$

a) g est définie si $\frac{x+3}{-x+4} > 0$. Nous étudions donc le signe de $\frac{x+3}{-x+4}$:

x	$-\infty$		-3		4		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$	⋮	$+$	
$-x+4$		$+$	⋮	$+$	0	$-$	
$\frac{x+3}{-x+4}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	

L'ensemble de définition de g est donc $D_g =]-3\,;4[$

b) g est le la forme $\ln(u(x))$ avec $u(x) = \frac{x+3}{-x+4}$. Nous avons donc

$$u'(x) = \frac{-x+4-(-1)(x+3)}{(-x+4)^2} = \frac{-x+4+x+3}{(-x+4)^2} = \frac{7}{(-x+4)^2} .$$

Ainsi, $g'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{\frac{7}{(-x+4)^2}}{\frac{x+3}{-x+4}} = \frac{7}{(-x+4)^2}\times\frac{-x+4}{x+3} = \frac{7}{(-x+4)(x+3)}$

Autres méthodes, astuces, notions… rencontrées :