Le cours – T° spé : Primitives

Équation différentielle et primitive :

Une **équation différentielle du 1er ordre** est une équation dans laquelle interviennent une fonction dérivable y, sa dérivée y' et la variable x. **L'inconnue de cette équation est la fonction y.**

Exemples d'équations différentielles :

$y' = x^3+1$ $\qquad$ $xy'+2y = e^x$ $\qquad$ $2y'-y = 1$

Toute fonction solution sur un intervalle I de l'équation différentielle $y' = f$ s'appelle une **primitive** de f sur I.

Une fonction F est une primitive de f sur I si, pour tout réel x de I :

$$F'(x) = f(x)$$

La recherche d'une primitive est l'opération inverse de la dérivation.
Toute fonction continue sur I admet des primitives sur I.

Si F est une primitive de f sur I, alors, pour tout réel k, la fonction $G(x) = F(x)+k$ est aussi une primitive de f sur I.
Une fonction continue sur I admet donc **une infinité de primitives** sur I.

Tableaux des primitives :

Fonction f	Une primitive F	Intervalle de validité
$f(x)=a$	$F(x)=ax$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^n$ pour n entier différent de -1 et 0	$F(x)=\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	• $\mathbb{R}$ lorsque $n>0$ • $]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$ lorsque $n<0$
$f(x)=\frac{1}{x^2}$	$F(x)=-\frac{1}{x}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$F(x)=\ln(x)$	$]0;+\infty[$
$f(x)=e^x$	$F(x)=e^x$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x)=2\sqrt{x}$	$]0;+\infty[$
$f(x)=\cos(x)$	$F(x)=\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\sin(x)$	$F(x)=-\cos(x)$	$\mathbb{R}$

Forme de la fonction	Primitive à une constante près	Conditions
$u'+v'$	$u+v$	u et v dérivables sur I
$\lambda u'$, avec λ réel	λu	
$u'u^n, n\in\mathbb{Z}, n\neq 0$ et $n\neq -1$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	Si n est négatif, alors $u(x)\neq 0$ pour tout x de I.
$\frac{u'}{u^2}$	$\frac{-1}{u}$	$u(x)\neq 0$ pour tout x de I
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}$	$u(x)>0$ pour tout x de I
$\frac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$	pour $u(x)\neq 0$
$u'e^u$	e^u	
$(v'\circ u)\times u'$	$v\circ u$	v dérivable sur un intervalle J et, pour tout x de I, $u(x)$ appartient à J

Les méthodes – T° spé : Primitives

Vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle :

Soit l'équation différentielle $y'-2y = 4$ pour x réel.
Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{2x}-2$ est une solution de cette équation.

Solution :

Calculons en premier lieu f' : $f'(x)=2e^{2x}$.
Nous avons donc : $f'(x)-2f(x) = 2e^{2x}-2(e^{2x}-2) = 2e^{2x}-2e^{2x}+4 = 4$.
f est donc bien une solution de l'équation différentielle $y'-2y = 4$.

Vérifier qu'une fonction est une primitive d'une autre fonction :

Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=xe^x$ et $g(x)=(x-1)e^x$.

a) Montrer que g est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
b) En déduire toutes les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

Solution :

a) g est une primitive de f si $g'(x)=f(x)$. Nous calculons donc la dérivée de g :
g est de la forme $g(x)=u(x)\times v(x)$ avec $u(x)=(x-1)$ et $v(x)=e^x$.
Donc $g'(x) = 1e^x+(x-1)e^x = e^x+xe^x-e^x = xe^x = f(x)$.
g est bien une primitive de f.

b) On en déduit l'ensemble des primitives de f : $F(x) = g(x)+k = (x-1)e^x+k$

Calculs de primitives :

Calculer une primitive des fonctions suivantes :

a) $f(x)=x^2-4x+9$ $\qquad$ **b)** $g(x)=\frac{1}{x}-\frac{4}{x^3}$ $\qquad$ **c)** $h(x)=6x(x^2-1)^3$

d) $i(x)=\frac{5}{2x+3}$ $\qquad$ **e)** $k(x)=3e^{2x+1}$

Solution :

a) $F(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+9x$

b) $g(x) = \frac{1}{x}-\frac{4}{x^3} = \frac{1}{x}-4x^{-3}$, donc $G(x) = \ln(x)-4\times\frac{x^{-2}}{-2} = \ln(x)+2\times x^{-2} = \ln(x)+\frac{2}{x^2}$

c) $h(x) = 6x(x^2-1)^3 = 3\times 2x(x^2-1)^3$, donc h est de la forme $h(x) = 3u'u^3$. Nous avons ainsi :

$$H(x) = 3\times\frac{(x^2-1)^4}{4} = \frac{3}{4}(x^2-1)^4$$

d) $i(x)=\frac{5}{2}\times\frac{2}{2x+3}$, donc i est de la forme $i(x)=\frac{5}{2}\times\frac{u'}{u}$. Nous avons ainsi :

$$I(x)=\frac{5}{2}\ln(|2x+3|)$$

e) $k(x) = 3e^{2x+1} = \frac{3}{2}\times 2e^{2x+1}$, donc k est de la forme $k(x) = \frac{3}{2}\times u'e^u$. Nous avons ainsi :

$$K(x) = \frac{3}{2}e^{2x+1}$$

Détermination de la constante :

Soit la fonctions f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$. Déterminer la primitive F de f telle que $F(0)=5$.

Solution :

f est de la forme $f(x)=\frac{u'}{u}$. L'ensemble des primitives de f sont donc : $F_k(x)=\ln(e^x+1)+k$ ($e^x+1>0$). Nous cherchons la primitive qui est telle que $F_k(0)=5 \Leftrightarrow \ln(e^0+1)+k=5 \Leftrightarrow \ln(2)+k=5 \Leftrightarrow k=5-\ln(2)$. La primitive recherchée est donc :

$$F(x)=\ln(e^x+1)+5-\ln(2)$$

Autres méthodes, astuces, notions… rencontrées :