Le cours – T° spé : Produit scalaire dans l'espace

Prérequis : Produit scalaire, droites et cercles, vecteurs dans l'espace, droites espace

Définition et propriétés :

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\cos(\vec{u}\,;\vec{v})$$

$\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ $\quad$ $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ $\quad$ $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$ $\quad$ $(k\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(k\vec{v}) = k(\vec{u}.\vec{v}),\ k\in\mathbb{R}$

$\vec{u}.\vec{v} = 0$ équivaut à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux (s'ils sont non nuls)

Autres propriétés du produit scalaire :

Expression analytique : Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé, alors $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$

En particulier $\|\vec{u}\| = \sqrt{(\vec{u}.\vec{u})} = \sqrt{(x^2+y^2+z^2)}$ et $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$ $\quad$ $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$ $\quad$ $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{4}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$

L'application de la deuxième formule dans une triangle ABC donne la formule d'Al-Kashi :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$$

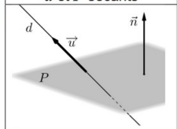
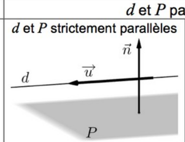
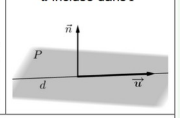
Équation de plan et positions relatives :

Un plan P de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ non nul admet une **équation cartésienne** de la forme $ax + by + cz + d = 0$

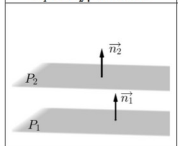
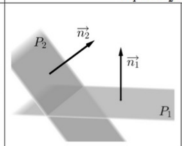
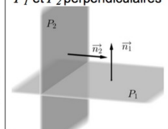
Un vecteur non nul $\vec{n}$ de l'espace est **normal à un plan $\mathscr{P}$** s'il est orthogonal à **deux vecteurs non colinéaires** de $\mathscr{P}$.

Deux droites d_1 et d_2 de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonales** si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

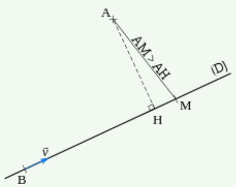
Positions droite-plan

Positions relatives	d et P sécants	d et P parallèles	
		d et P strictement parallèles	d incluse dans P
- Droite d de vecteur directeur $\vec{u}$ - Plan P de vecteur normal $\vec{n}$			
Vecteurs	$\vec{u}$ et $\vec{n}$ non orthogonaux	$\vec{u}$ et $\vec{n}$ orthogonaux	
Produit scalaire	$\vec{u}.\vec{n}\neq 0$	$\vec{u}.\vec{n} = 0$	

Positions plan-plan

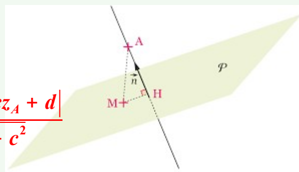
Positions relatives	P_1 et P_2 parallèles	P_1 et P_2 sécants	
- Plan P_1 de vecteur normal $\vec{n_1}$ - Plan P_2 de vecteur normal $\vec{n_2}$			P_1 et P_2 perpendiculaires 
Vecteurs	$\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ colinéaires	$\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ non colinéaires	$\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ orthogonaux $\vec{n_1}.\vec{n_2} = 0$

Distance AH d'un point à une droite



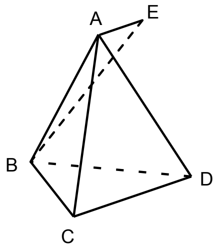
Distance AH d'un point à un plan

$$d(A, Plan) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$



Les méthodes – T° spé : Produit scalaire dans l'espace

Un exercice sans coordonnée :



Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier d'arête de longueur a et E le point défini par $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$.

1) Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$

2) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$

3) En déduire que le triangle ABE est rectangle en A.

4) Calculer l'angle $\widehat{AEB}$ au degré près.

Solution :

1) Le triangle ABC est un triangle équilatéral (comme le tétraèdre est régulier), donc nous savons que $\widehat{BAC} = 60°$.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}) = a\times a\times\cos(60) = \frac{a^2}{2}$.

De même, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \frac{a^2}{2}$.

2) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = 0$.

3) Calculons $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}$:

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB}.\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$ d'après la question précédente. Nous pouvons en conclure que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont orthogonaux et ainsi que le triangle ABE est rectangle en A.

4) Dans le triangle ABE rectangle en A, $\tan(\widehat{AEB}) = \frac{AB}{AE} = \frac{a}{\frac{1}{3}a} = 3$. Nous avons donc $\widehat{AEB}\approx 72°$

Ne pas oublier de mettre la calculatrice en degré dans SET UP.

Équation cartésienne de plan :

1) Soit $A(-1\,;2\,;5)$ et $B(3\,;8\,;7)$ deux points de l'espace et $\vec{n}\begin{pmatrix}-3\\1\\4\end{pmatrix}$ un vecteur.

a) Déterminer une équation du plan $\mathscr{P}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

b) Déterminer une équation du plan médiateur $\mathscr{P}'$ du segment $[AB]$.

Solution :

a) $\vec{n}$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$, donc l'équation cartésienne de $\mathscr{P}$ est de la forme : $-3x + y + 4z + d = 0$.
De plus, $A\in\mathscr{P}$, donc $-3\times(-1) + 2 + 4\times 5 + d = 0$ et ainsi $d = -25$.
L'équation cartésienne de $\mathscr{P}$ est donc : $-3x + y + 4z - 25 = 0$.

b) $\mathscr{P}'$ est le plan médiateur de $[AB]$. $\overrightarrow{AB}$ est donc un vecteur normal à $\mathscr{P}'$. Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\6\\2\end{pmatrix}$.

Nous prendrons comme vecteur normal le vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$. L'équation cartésienne de $\mathscr{P}'$ est donc de la forme :

$2x + 3y + z + d = 0$.
De plus, le milieu I de $[AB]$ appartient à $\mathscr{P}'$. I a pour coordonnées : $I(1\,;5\,;6)$. Ainsi, $2\times 1 + 3\times 5 + 6 + d = 0$ et $d = -23$.
L'équation cartésienne de $\mathscr{P}'$ est donc : $2x + 3y + z - 23 = 0$.

1) Soit $A(1;0;3)$ et $B(2;2;7)$ et $C(-1;5;4)$ trois points de l'espace et $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne $2x+y-z+1=0$.

a) Démontrer que les points A, B et C définissent un plan.
b) Démontrer que $\mathscr{P}$ est le plan (ABC).
c) En déduire un vecteur normal au plan (ABC).

Solution :

a) 3 points définissent un plan s'ils ne sont pas alignés. Vérifions donc la non colinéarité des deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\5\\1\end{pmatrix}$. Il n'existe aucun nombre réel k tel que $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$. Les vecteur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont donc pas colinéaires et les points A, B et C non alignés. Ils définissent donc un plan (ABC).

b) Le plan $\mathscr{P}$ est le plan (ABC) si les trois points A, B et C appartiennent à $\mathscr{P}$. Vérifions donc si les coordonnées de A, B et C vérifient l'équation de $\mathscr{P}$:
$2\times1+0-3+1=2-3+1=0$, donc $A\in\mathscr{P}$.
$2\times2+2-7+1=4+2-7+1=0$, donc $B\in\mathscr{P}$.
$2\times(-1)+5-4+1=-2+5-4+1=0$, donc $C\in\mathscr{P}$.
$\mathscr{P}$ est donc le plan (ABC).

c) Comme $2x+y-z+1=0$ est l'équation cartésienne de (ABC), un vecteur normal à (ABC) est $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

Exercice type bac :

Dans l'espace, rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$, on considère les points :

A(2 ; 0 ; 3), B(0 ; 2 ; 1), C(−1 ; −1 ; 2) et D(3 ; −3 ; −1).

1. Calcul d'un angle

a. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et en déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.
b. Calculer les longueurs AB et AC.
c. À l'aide du produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, déterminer la valeur du cosinus de l'angle $\widehat{BAC}$ puis donner une valeur approchée de la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ au dixième de degré.

2. Calcul d'une aire

a. Déterminer une équation du plan $\mathscr{P}$ passant par le point C et perpendiculaire à la droite (AB).
b. Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).
c. En déduire les coordonnées du projeté orthogonal E du point C sur la droite (AB), c'est-à-dire du point d'intersection de la droite (AB) et du plan $\mathscr{P}$
d. Calculer l'aire du triangle ABC.

3. Calcul d'un volume

a. Soit le point F(1 ; −1 ; 3). Montrer que les points A, B, C et F sont coplanaires.
b. Vérifier que la droite (FD) est orthogonale au plan (ABC).
c. Sachant que le volume d'un tétraèdre est égal au tiers de l'aire de sa base multiplié par sa hauteur, calculer le volume du tétraèdre ABCD.

Solution :

1. Calcul d'un angle

a. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\-1\\-1\end{pmatrix}$; or ces coordonnées ne sont pas proportionnelles $\dfrac{-2}{-3}\neq\dfrac{2}{-1}\neq\dfrac{-2}{-1}$, donc il n'existe pas de réel $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AB}=\alpha\overrightarrow{AC}$: ces vecteurs ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

b.
- $AB^2=4+4+4=3\times4$, donc $AB=2\sqrt{3}$:
- $AC^2=9+1+1=11$, donc $AC=\sqrt{11}$.

c.
- D'une part $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6-2+2=6$;
- D'autre part $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$.

On a donc $6=2\sqrt{3}\times\sqrt{11}\times\cos\widehat{BAC}\iff\cos\widehat{BAC}=\dfrac{6}{2\sqrt{3}\times\sqrt{11}}=\dfrac{3}{\sqrt{33}}$.

La calculatrice donne $\widehat{BAC}\approx58{,}51$, soit $58{,}5°$ au dixième près.

2. Calcul d'une aire

a. Soit $M(x\,;\,y\,;\,z)$ un point de $\mathscr{P}$. On a $M(x\,;\,y\,;\,z)\in\mathscr{P}\iff\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

Avec $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x+1\\y+1\\z-2\end{pmatrix}$, on obtient :

Méthode différente de celle vue en cours mais équivalente !

$-2(x+1)+2(y+1)-2(z-2)=0\iff-(x+1)+(y+1)-(z-2)=0\iff-x+y-z+2=0.$

b. En prenant le vecteur $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ comme vecteur directeur de la droite (AB), soit $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ on a :

$$M(x\,;\,y\,;\,z)\in(AB)\iff\overrightarrow{AM}=t\times\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\iff\left\{\begin{array}{lcl}x-2&=&t\times(-1)\\y-0&=&t\times1\\z-3&=&t\times(-1)\end{array}\right.,t\in\mathbb{R}\iff$$

$$\left\{\begin{array}{lcl}x&=&2-t\\y&=&t\\z&=&3-t\end{array}\right.,t\in\mathbb{R}.$$

c. E projeté orthogonal de C sur (AB) appartient au plan $\mathscr{P}$ et à la droite (AB) ; ses coordonnées vérifient donc l'équation de $\mathscr{P}$ et les équations paramétriques de (AB), donc le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl}-x+y-z+2&=&0\\x&=&2-t\\y&=&t\\z&=&3-t\end{array}\right.,t\in\mathbb{R}$$

; en remplaçant x, y et z par leurs expressions en fonction de t dans l'équation de $\mathscr{P}$ on obtient :

$-2+t+t-3+t+2=0\iff3t-3=0\iff t=1.$

On a donc E(1 ; 1 ; 2).

d. On a $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\-3\\1\end{pmatrix}$, d'où $BC^2 = 1+9+1 = 11$ et $BC = \sqrt{11}$.

Comme $AC = BC = \sqrt{11}$, le triangle ABC est isocèle en C ; or on a vu que E est le projeté de C sur la droite (AB), donc dans le triangle isocèle (ABC), [CE] est la hauteur relative à la base [AB].

On a $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$, d'où $CE^2 = 1+4 = 8$ et $CE = 2\sqrt{2}$.

L'aire du triangle (ABC) est donc égale à :

$\mathscr{A}(ABC) = \dfrac{AB \times CE}{2} = \dfrac{2\sqrt{3}\times 2\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{6}$.

3. Calcul d'un volume

a. $F \in (ABC) \iff$ il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, tels que : $\overrightarrow{AF} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} \iff$

$\begin{cases} -1 &= -2\alpha - 3\beta \\ -1 &= 2\alpha - \beta \\ 0 &= -2\alpha - \beta \end{cases}$. En ajoutant membre à membre les deux dernières équations on obtient $-1 = -2\beta \iff \beta = \dfrac{1}{2}$ et en remplaçant β par $\dfrac{1}{2}$ dans la première équation $-1 = -2\alpha + \dfrac{3}{2} \iff 2\alpha = 1 - \dfrac{3}{2} = -\dfrac{1}{2} \iff \alpha = -\dfrac{1}{4}$.

Donc $\overrightarrow{AF} = -\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$: les quatre points A, B, C et F sont coplanaires.

b. Avec $\overrightarrow{FD}\begin{pmatrix}2\\-2\\-4\end{pmatrix}$, on peut calculer :

$\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{AB} = -2-2+4 = 0$ et
$\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{AC} = -6+2+4 = 0$.

Le vecteur $\overrightarrow{FD}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) : il est donc orthogonal à ce plan, ou encore la droite (FD) est orthogonale au plan (ABC).

c. Si l'on choisit comme base le triangle (ABC), la hauteur de ce tétraèdre est donc [FD] et la volume est égal à :

$\mathscr{V}(ABCD) = \dfrac{1}{3} \times \mathscr{A}(ABC) \times FD$

Autres méthodes, astuces, notions… rencontrées :