Le cours – T° spé : Récurrence et convergence monotone

Prérequis : généralités suites, suites arithm et géométriques, limites de suites

Raisonnement par récurrence :

$P(n)$ désigne une propriété concernant un entier naturel n et n_0 désigne un entier naturel.

Si l'on démontre les deux étapes suivantes :
- étape 1 (initialisation) : $P(n)$ est vraie pour l'entier n_0 ;
- étape 2 (hérédité) : pour tout entier $k \geqslant n_0$, « $P(k)$ est vraie » implique « $P(k+1)$ est vraie » ;
Alors (conclusion) on peut conclure que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Dans un **raisonnement par récurrence**, pour démontrer l'hérédité :
On considère un entier k, avec $k \geqslant n_0$, et on suppose que la propriété est vraie au rang k ($P(k)$ vraie). C'est l'**hypothèse de récurrence**. On démontre alors que la propriété est vraie au rang $k+1$ ($P(k+1)$ vraie) en utilisant l'hypothèse de récurrence.

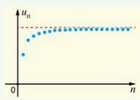
Suite majorée, minorée, bornée :

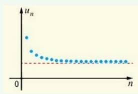
- La suite (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant M$. M est appelé **majorant** de (u_n).
- La suite (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant m$. m est appelé **minorant** de (u_n).
- La suite (u_n) est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Soit (u_n) une suite croissante définie sur $\mathbb{N}$. Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$ alors la suite (u_n) est majorée par L.
Soit (u_n) une suite décroissante définie sur $\mathbb{N}$. Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$ alors la suite (u_n) est minorée par L.

Théorème de convergence monotone :

- Si une suite **croissante et majorée** alors elle est **convergente**.
- Si une suite **décroissante et minorée** alors elle est **convergente**.





- Si une suite **croissante** est **non majorée** alors elle tend vers $+\infty$.
- Si une suite **décroissante** est **non minorée** alors elle tend vers $-\infty$.

Unicité de la limite :

Si la suite (u_n) définie par récurrence par $u_{n+1} = f(u_n)$ est **convergente** de limite L, alors cette limite L est solution de l'équation

$$L = f(L)$$

Les méthodes – T° spé : Récurrence et convergence monotone

Quelques démonstrations par récurrence :

1) On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 0{,}3\,u_n + 7$ et $u_0 = 2$.
Démontrer par récurrence que $u_n \leqslant 10$ pour tout entier naturel n.

Solution :
Soit $P(n)$ la propriété : $u_n \leqslant 10$.
Initialisation :
$u_0 = 2 \leqslant 10$, donc $P(0)$ est vraie.
Hérédité :
Supposons que la propriété est vraie pour un nombre $k \geqslant 0$, c'est à dire $u_k \leqslant 10$ (hypothèse de récurrence)
Démontrons alors que la propriété est vraie au rang $k+1$ ($u_{k+1} \leqslant 10$) :
En partant de l'hypothèse de récurrence, nous avons
$u_k \leqslant 10$
$0{,}3\,u_k \leqslant 3$
$0{,}3\,u_k + 7 \leqslant 10$
$u_{k+1} \leqslant 10$
La propriété est donc héréditaire.
Conclusion :
$P(0)$ est vraie et $P(n)$ est héréditaire à partir du rang 0, donc $P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

$$u_n \leqslant 10$$

2) On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_{n+1} = v_n + 2n + 3$ et $v_0 = 1$.
Démontrer par récurrence que $v_n = (n+1)^2$ pour tout entier naturel n.

Solution :
Soit $P(n)$ la propriété : $v_n = (n+1)^2$.
Initialisation :
D'une part, $v_0 = 1$ d'après l'énoncé.
D'autre part, pour $n = 0$, $(n+1)^2 = (0+1)^2 = 1$.
Donc $P(0)$ est vraie.
Hérédité :
Supposons que la propriété est vraie pour un nombre $k \geqslant 0$, c'est à dire $v_k = (k+1)^2$ (hypothèse de récurrence)
Démontrons alors que la propriété est vraie au rang $k+1$ ($v_{k+1} = (k+1+1)^2 = (k+2)^2 = k^2+4k+4$) :
D'après l'énoncé,
$v_{k+1} = v_k + 2k + 3$.
En utilisant l'hypothèse de récurrence, nous obtenons :
$v_{k+1} = (k+1)^2 + 2k + 3 = k^2+2k+1 + 2k + 3 = k^2+4k+4$
La propriété est donc héréditaire.
Conclusion :
$P(0)$ est vraie et $P(n)$ est héréditaire à partir du rang 0, donc $P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

$$v_n = (n+1)^2$$

3) Montrer par récurrence que la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $w_0 = 1$ et $w_{n+1} = 2w_n - 3$, est décroissante.

Solution :

Soit $P(n)$ la propriété : $w_{n+1} \leq w_n$ (la suite (w_n) est décroissante).
Initialisation :
D'une part, $w_0 = 1$.
D'autre part, $w_1 = 2w_0 - 3 = 2 - 3 = -1$.
Nous avons donc $w_1 \leq w_0$, donc $P(0)$ est vraie.
Hérédité :
Supposons que la propriété est vraie pour un nombre $k \geqslant 0$, c'est à dire $w_{k+1} \leq w_k$ (hypothèse de récurrence)
Démontrons alors que la propriété est vraie au rang $k+1$ ($w_{k+2} \leq w_{k+1}$) :
En partant de l'hypothèse de récurrence, nous avons
$w_{k+1} \leq w_k$
$2w_{k+1} \leq 2w_k$
$2w_{k+1} - 3 \leq 2w_k - 3$
$w_{k+2} \leq w_{k+1}$
La propriété est donc héréditaire.
Conclusion :
$P(0)$ est vraie et $P(n)$ est héréditaire à partir du rang 0, donc $P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

$w_{n+1} \leq w_n$ et ainsi la suite (w_n) est décroissante

Convergence d'une suite définie par récurrence :

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{14}{3}$ et $u_0 = 1$

1) Démontrer par récurrence que (u_n) est majorée par 7.
2) En déduire que le suite (u_n) est croissante.
3) Conclure quant à la convergence de la suite (u_n).
4) Calculer la limite L de la suite (u_n).

Solution :

1) Soit $P(n)$ la propriété : $u_n \leqslant 7$ ((u_n) est majorée par 7).
Initialisation :
$u_0 = 1 \leqslant 7$, donc $P(0)$ est vraie.
Hérédité :
Supposons que la propriété est vraie pour un nombre $k \geqslant 0$, c'est à dire $u_k \leqslant 7$ (hypothèse de récurrence)
Démontrons alors que la propriété est vraie au rang $k+1$ ($u_{k+1} \leqslant 7$) :
En partant de l'hypothèse de récurrence, nous avons
$u_k \leqslant 7$
$\frac{1}{3}u_k \leqslant \frac{7}{3}$
$\frac{1}{3}u_k + \frac{14}{3} \leqslant \frac{7}{3} + \frac{14}{3}$
$\frac{1}{3}u_k + \frac{14}{3} \leqslant \frac{21}{3}$
$u_{k+1} \leqslant 7$
La propriété est donc héréditaire.
Conclusion :
$P(0)$ est vraie et $P(n)$ est héréditaire à partir du rang 0, donc $P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

$$u_n \leqslant 7$$

2) Pour étudier la **variation de la suite (u_n)**, nous devons étudier le **signe de $u_{n+1} - u_n$** :

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}u_n + \frac{14}{3} - u_n = -\frac{2}{3}u_n + \frac{14}{3}$
Or, nous avons montré au **1)** que $u_n \leqslant 7$, donc :
$u_n \leqslant 7$
$-\frac{2}{3}u_n \geqslant -\frac{14}{3}$
$-\frac{2}{3}u_n + \frac{14}{3} \geqslant -\frac{14}{3} + \frac{14}{3}$
$u_{n+1} - u_n \geqslant 0$
Nous avons donc $u_{n+1} \geqslant u_n$, la suite (u_n) est croissante.

3) La suite (u_n) est croissante et majorée, donc la suite (u_n) est convergente.

ATTENTION :
Ce n'est pas parce que la suite est majorée par 7 que sa limite est 7 !

4) la suite (u_n) étant convergente, on calcule la limite en résolvant l'équation :
$L = \frac{1}{3}L + \frac{14}{3}$
$\frac{2}{3}L = \frac{14}{3}$
$L = \frac{14}{3} \times \frac{3}{2} = 7$. Nous avons donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = 7$.

Récurrence et fonction :

On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{3x}{1+2x}$ et la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = 0{,}7$.
1) Étudier les variations de la fonction f.
2) Démontrer que $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.
3) Conclure quant à la convergence de la suite (u_n).

Solution :

1) $f'(x) = \frac{3(1+2x) - 3x \times 2}{(1+2x)^2} = \frac{3}{(1+2x)^2} \geqslant 0$, donc f est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

2) Soit $P(n)$ la propriété : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.
Initialisation :
D'une part $u_0 = 0{,}7$.
D'autre part $u_1 = f(0{,}7) = \frac{2{,}1}{1+1{,}4} = 0{,}875$.
Nous avons donc $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 1$. $P(0)$ est vraie.
Hérédité :
Supposons que la propriété est vraie pour un nombre $k \geqslant 0$, c'est à dire $0 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 1$ (hypothèse de récurrence)
Démontrons alors que la propriété est vraie au rang $k+1$ ($0 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 1$) :
En partant de l'hypothèse de récurrence, nous avons
$0 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 1$
$f(0) \leqslant f(u_k) \leqslant f(u_{k+1}) \leqslant f(1)$ car f est croissante.
$0 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 1$
La propriété est donc héréditaire.
Conclusion :
$P(0)$ est vraie et $P(n)$ est héréditaire à partir du rang 0, donc $P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$$

3) Nous avons démontré dans la question **2)** que la suite (u_n) est croissante ($u_n \leqslant u_{n+1}$) et qu'elle est majorée par 1 ($u_n \leqslant 1$). Donc la suite (u_n) est convergente. On calcule sa limite en résolvant l'équation $L = f(L)$:
$L = \frac{3L}{1+2L}$
$L(1+2L) = 3L$
$2L^2 - 2L = 0$
$L(2L - 2) = 0$
Donc $L = 0$ ou $L = 1$.
Comme la suite (u_n) est croissante et que $u_0 = 0{,}7$, la solution est $L = 1$. $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$

Autres méthodes, astuces, notions… rencontrées :