

Trois définitions d'une suite :

Définition par récurrence

$$\begin{cases} \text{un terme donné} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

calcul d'un terme à partir du précédent

exemple :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases}$$

Définition explicite

$$u_n = f(n)$$

calcul direct de chaque terme

exemple :

$$u_n = 6n + 8$$

Définition avec un algorithme

```
U=2
n=0
for i in range(4):
    U=U+5
    n=n+1
    print("pour n = ",n,"U = ",U)
```

```
pour n = 1 U = 7
pour n = 2 U = 12
pour n = 3 U = 17
pour n = 4 U = 22
>>>
```

avec une boucle for ou while

Variations d'une suite :

- La suite  $(u_n)$  est **croissante** à partir du rang  $p$  signifie que pour  $n \geq p$ , on a  $u_{n+1} \geq u_n$ .
- La suite  $(u_n)$  est **décroissante** à partir du rang  $p$  signifie que pour  $n \geq p$ , on a  $u_{n+1} \leq u_n$ .

Étude des variations d'une suite :

Méthode n°1 (à privilégier) :

On compare  $u_{n+1}$  et  $u_n$  en étudiant le signe de  $u_{n+1} - u_n$ .

Méthode n°2 (quand on a des puissances de n) :

On compare  $u_{n+1}$  et  $u_n$  en comparant  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  à 1.

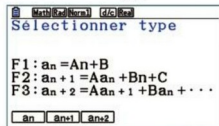
Méthode n°3 (SEULEMENT pour les suites définies EXPLICITEMENT) :

Si  $u_n = f(n)$ , on étudie les variations de la fonction  $f(x)$  sur  $[0; +\infty[$ .

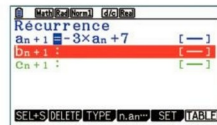
Suites avec la calculatrice :

1 Sélectionner le mode Récurrence.

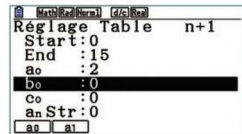
Si l'écran obtenu ne permet pas d'exprimer  $a_{n+1}$  en fonction de  $a_n$ , appuyer sur  $\left[ \text{F3} \right]$  pour sélectionner le « Type » de suite, puis sur  $\left[ \text{F2} \right]$  pour sélectionner  $a_{n+1}$ .



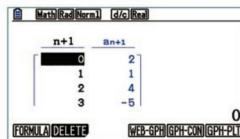
2 Renseigner l'écran comme ci-dessous :  $a_n$  est obtenu en appuyant sur la touche  $\left[ \text{F2} \right]$  pour sélectionner  $n \cdot a_n \dots$ , puis sur la touche  $\left[ \text{F2} \right]$ . Appuyer sur **EXE**.



3 Accéder au menu SET en appuyant sur la touche  $\left[ \text{F5} \right]$  puis renseigner les indices des premier et dernier termes calculés ainsi que la valeur du premier terme. Appuyer sur **EXE**.



4 Appuyer sur la touche **EXIT** puis  $\left[ \text{F6} \right]$  pour obtenir le tableau des valeurs des termes de  $(u_n)$  :



Calculer des termes :

Suite définie par récurrence

exemple n°1 :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases}$$

$$u_0 = 2$$

$$u_1 = 2u_0 + 3 = 2 \times 2 + 3 = 7$$

$$u_2 = 2 \times 7 + 3 = 17$$

$$u_3 = 2 \times 17 + 3 = 37$$

...

exemple n°2 :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + 3n \end{cases}$$

$$u_0 = 0$$

$$u_1 = u_0 + 3 \times 0 = 0$$

$$u_2 = u_1 + 3 \times 1 = 0 + 3 = 3$$

$$u_3 = u_2 + 3 \times 2 = 3 + 6 = 9$$

...

Suite définie explicitement

exemple n°1 :

$$u_n = 6n + 8, n \geq 0$$

$$u_0 = 6 \times 0 + 8 = 8$$

$$u_1 = 6 \times 1 + 8 = 14$$

$$u_2 = 6 \times 2 + 8 = 20$$

...

$$u_{50} = 6 \times 50 + 8 = 308$$

...

exemple n°2 :

$$f(x) = \frac{x+3}{x+1}$$

$$u_n = f(n), n \geq 0$$

$$u_0 = f(0) = 3$$

$$u_1 = f(1) = \frac{4}{2} = 2$$

$$u_2 = f(2) = \frac{5}{3}$$

...

Suite définie avec un algorithme

exemple :

```
U=2
n=0
for i in range(10):
    U=U+5
    n=n+1
    print("pour n = ",n,"U = ",U)
```

$$u_0 = 2$$

$$u_1 = u_0 + 5 = 2 + 5 = 7$$

$$u_2 = u_1 + 5 = 7 + 5 = 12$$

$$u_3 = u_2 + 5 = 12 + 5 = 17$$

...

Étude de la monotonie d'une suite :

exemple n°1 :

Soit  $u_n = \frac{n+2}{n+1}, n \geq 0$ . Etudier les variations de la suite  $(u_n)$ .

Solution :

Avec la méthode n°1 :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1+2}{n+1+1} - \frac{n+2}{n+1}$$

$$= \frac{n+3}{n+2} - \frac{n+2}{n+1}$$

$$= \frac{(n+3)(n+1) - (n+2)(n+2)}{(n+2)(n+1)}$$

$$= \frac{(n^2+n+3n+3) - (n^2+4n+4)}{(n+2)(n+1)}$$

$$= \frac{-1}{(n+2)(n+1)} \leq 0$$

On a donc  $u_{n+1} - u_n \leq 0$  et ainsi  $u_{n+1} \leq u_n$ .

La suite  $(u_n)$  est donc décroissante.

exemple n°2 :

Soit  $u_n = 2^n, n \geq 0$ . Démontrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.

Solution :

Avec la méthode n°2 :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2^{n+1-n} = 2 \geq 1$$

On a donc  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$  et ainsi

$$u_{n+1} \geq u_n$$

La suite  $(u_n)$  est donc croissante.

exemple n°3 :

Soit  $u_n = \frac{8n-4}{n+1}, n \geq 0$ . Etudier les variations de la suite  $(u_n)$ .

Solution :

Avec la méthode n°3 :

$$\text{Soit la fonction } f(x) = \frac{8x-4}{x+1}$$

définie sur  $[0; +\infty[$ .

$f$  est de la forme  $\frac{U}{V}$ .

$$f'(x) = \frac{8(x+1) - (8x-4)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{12}{(x+1)^2} \geq 0$$

$f$  est croissante sur  $[0; +\infty[$ .

On en déduit que la suite  $(u_n)$  est croissante.

Erreurs courantes et astuces diverses :

Il ne faut PAS étudier les variations d'une suite en calculant les premiers termes. Ceci n'est pas une démonstration mais juste une conjecture !

On ne fait surtout PAS de tableau de variations pour une suite. Les flèches des tableaux de variations indiquent la continuité (les suites sont discontinues).

Décalage des indices :  $u_{n+1} = 2u_n + 3 \Leftrightarrow u_n = 2u_{n-1} + 3 \Leftrightarrow u_{n+8} = 2u_{n+7} + 3$ . De même,  $u_n = 5n + 9 \Leftrightarrow u_{n+1} = 5(n+1) + 9$

### Déterminer un seuil :

Soit  $u_n = \frac{n+2}{n+1}$ ,  $n \geq 0$ . Nous savons que la suite  $(u_n)$  est décroissante, que  $u_0 = 2$  et que la limite de  $(u_n)$  est 1 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . Voici un algorithme écrit en Python :

```
def seuil(a):  
    n=0  
    U=2  
    while U > a:  
        n=n+1  
        U=(n+2)/(n+1)  
    return n
```

- 1) Que permet de faire ce programme ?
- 2) Que renvoie seuil(1,055) ?

### Solution :

1) Ce programme permet de déterminer le plus petit entier naturel  $n$  tel que  $u_n \leq a$ , où  $a$  est un nombre choisi par l'utilisateur. En effet, la boucle while continuera tant que  $U > a$ . La boucle sera « brisée » dès que  $u_n \leq a$  et le programme renverra la valeur de  $n$  correspondante.

2) Chercher la valeur renvoyée par seuil(1,055) revient à chercher pour quelle valeur de  $n$  on a  $u_n \leq 1,055$ . On cherche cette valeur en utilisant le **tableau de valeur du mode récurrence** de la calculatrice (voir cours).

On obtient :

$$u_{17} \approx 1,0555 \text{ et } u_{18} \approx 1,0526$$

Donc seuil(1,055) renverra la valeur 18.

### Autres méthodes, astuces, notions... rencontrées :

**Suite arithmétique**

**Définition par récurrence :**

$u_{n+1} = u_n + r$   
 $r$  est la **raison** de la suite arithmétique

**Prouver qu'il s'agit d'une suite arithmétique :**

$$u_{n+1} - u_n = r$$

**Expression explicite :**

$$u_n = u_0 + nr$$

$$u_n = u_1 + (n-1)r$$

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

**Somme de termes :**

$$S = \text{nbre de termes} \times \frac{1^{\text{er}} \text{ terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

$$1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

**Variations :**

Si  $r > 0$ , alors la suite  $(u_n)$  est croissante  
 Si  $r < 0$ , alors la suite  $(u_n)$  est décroissante

**Remarque :**

Les points de la représentation graphique sont alignés.

**Suite géométrique**

**Définition par récurrence :**

$u_{n+1} = q \times u_n$   
 $q$  est la **raison** de la suite géométrique

**Prouver qu'il s'agit d'une suite géométrique :**

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$$

**Expression explicite :**

$$u_n = u_0 \times q^n$$

$$u_n = u_1 \times q^{n-1}$$

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

**Somme de termes :**

$$S = 1^{\text{er}} \text{ terme} \times \frac{1 - q^{\text{nbre de termes}}}{1 - q}$$

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

**Variations :**

Pour  $u_0 > 0$  :  
 Si  $q > 1$ , alors la suite  $(u_n)$  est croissante  
 Si  $0 < q < 1$ , alors la suite  $(u_n)$  est décroissante  
 Pour  $u_0 < 0$  :  
 Si  $q > 1$ , alors la suite  $(u_n)$  est décroissante  
 Si  $0 < q < 1$ , alors la suite  $(u_n)$  est croissante

**Remarque :**

Si  $q < 0$ , la suite  $(u_n)$  n'est ni croissante, ni décroissante. Elle alterne entre valeurs négatives et valeurs positives.

**Déterminer la raison à partir de termes connus :**

**Suite arithmétique**

Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique telle que  $u_3 = 5$  et  $u_7 = 15$ .  
 Déterminer la raison de cette suite et calculer  $u_0$ .

**Solution :**

On utilise l'expression explicite  $u_n = u_p + (n-p)r$  avec  $n = 7$  et  $p = 3$  :

$$u_7 = u_3 + (7-3)r$$

$$u_7 = u_3 + 4r$$

$$r = \frac{u_7 - u_3}{4}$$

$$r = \frac{15 - 5}{4}$$

$$r = \frac{5}{2}$$

Ensuite avec la relation

$$u_n = u_0 + \frac{5}{2}n$$

pour  $n = 3$ , on obtient :

$$u_3 = u_0 + \frac{5}{2} \times 3$$

$$5 = u_0 + \frac{15}{2}$$

$$u_0 = 5 - \frac{15}{2} = -\frac{5}{2}$$

Donc  $u_n = -\frac{5}{2} + \frac{5}{2}n$

**Suite géométrique**

Soit  $(u_n)$  une suite géométrique telle que  $u_3 = 5$  et  $u_6 = 40$ .  
 Déterminer la raison de cette suite et calculer  $u_0$ .

**Solution :**

On utilise l'expression explicite  $u_n = u_p \times q^{n-p}$  avec  $n = 6$  et  $p = 3$  :

$$u_6 = u_3 \times q^{6-3}$$

$$u_6 = u_3 \times q^3$$

$$q^3 = \frac{u_6}{u_3}$$

$$q^3 = \frac{40}{5}$$

$$q^3 = 8$$

$$q = \sqrt[3]{8} = 2$$

Ensuite avec la relation

$$u_n = u_0 \times 2^n$$

pour  $n = 3$ , on obtient :

$$u_3 = u_0 \times 2^3$$

$$5 = u_0 \times 8$$

$$u_0 = \frac{5}{8}$$

Donc  $u_n = \frac{5}{8} \times 2^n$

**Forme explicite, variation et somme de termes :**

**Suite arithmétique**

Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique de premier terme  $u_0 = 2$  et de raison  $r = 3$ .

- Déterminer l'expression du terme général  $u_n$  et calculer le huitième terme de cette suite.
- Déterminer le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .
- Calculer la somme  $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{17}$

**Solution :**

1)  $(u_n)$  est la suite arithmétique  $u_{n+1} = u_n + 3$  avec  $u_0 = 2$ .  
 On utilise la formule  $u_n = u_0 + nr$ . On a donc  $u_n = 2 + 3n$ .  
 Le huitième terme est le terme de rang  $n = 7$ .  
 $u_7 = 2 + 3 \times 7 = 23$ .

2)  $(u_n)$  est une suite arithmétique de raison  $r = 3$ .  $3 > 0$ , donc  $(u_n)$  est croissante.

3) On utilise la formule :

$$S = \text{nbre de termes} \times \frac{1^{\text{er}} \text{ terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

Cela donne :

$$S = 18 \times \frac{u_0 + u_{17}}{2} = 18 \times \frac{2 + 53}{2} = 495$$

**Suite géométrique**

Soit  $(u_n)$  une suite géométrique de premier terme  $u_0 = 3$  et de raison  $q = 2$ .

- Déterminer l'expression du terme général  $u_n$  et calculer le septième terme de cette suite.
- Déterminer le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .
- Calculer la somme  $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{17}$

**Solution :**

1)  $(u_n)$  est la suite géométrique  $u_{n+1} = 2 \times u_n$  avec  $u_0 = 3$ .  
 On utilise la formule  $u_n = u_0 \times q^n$ . On a donc  $u_n = 3 \times 2^n$ .  
 Le septième terme est le terme de rang  $n = 6$ .  
 $u_6 = 3 \times 2^6 = 192$ .

2)  $(u_n)$  est une suite géométrique de premier terme  $u_0 = 3 > 0$  et de raison  $q = 2 > 1$ . Donc  $(u_n)$  est croissante.

3) On utilise la formule :  $S = 1^{\text{er}} \text{ terme} \times \frac{1 - q^{\text{nbre de termes}}}{1 - q}$ .

Cela donne :

$$S = u_0 \times \frac{1 - 2^{18}}{1 - 2} = 3 \times \frac{1 - 2^{18}}{1 - 2} = 786429$$

**Erreurs courantes et astuces diverses :**

Attention,  $3 \times 2^n$  n'est pas égal à  $6^n$ . C'est une erreur fréquente. Il faut laisser l'écriture  $u_n = 3 \times 2^n$  telle quelle.

**Exercice type avec suite auxiliaire (première → terminale) :**

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 10000$  et pour tout entier naturel  $n$  :  $u_{n+1} = 0,95u_n + 200$ .

1) Calculer  $u_1$  et  $u_2$ .

Pour tout entier  $n$ , on considère la suite  $(w_n)$  définie par :  $w_n = u_n - 4000$ .

2) Calculer  $w_0$ .

3) **Démontrer que la suite  $(w_n)$  est géométrique de raison égale à 0,95.**

4) Exprimer  $w_n$  en fonction de  $n$ .

5) En déduire l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

**Solution :**

1)  $u_1 = 0,95u_0 + 200 = 0,95 \times 10000 + 200 = 9700$

$u_2 = 0,95u_1 + 200 = 0,95 \times 9700 + 200 = 9415$

2)  $w_n = u_n - 4000$  donc  $w_0 = u_0 - 4000 = 10000 - 4000 = 6000$

3) Pour démontrer que  $(w_n)$  est géométrique, on calcule  $\frac{w_{n+1}}{w_n}$  qui doit être égal à une constante (la raison de la suite géométrique).

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{u_{n+1} - 4000}{u_n - 4000} = \frac{0,95u_n + 200 - 4000}{u_n - 4000} = \frac{0,95u_n - 3800}{u_n - 4000} = \frac{0,95(u_n - \frac{3800}{0,95})}{u_n - 4000} = \frac{0,95(u_n - 4000)}{u_n - 4000} = 0,95$$

On a donc  $w_{n+1} = 0,95w_n$ .  $(w_n)$  est une suite géométrique de raison 0,95.

4) On utilise la formule  $w_n = w_0 \times q^n$  comme  $(w_n)$  est géométrique. On a donc  $w_n = 6000 \times 0,95^n$ .

5) Enfin, étant donné que  $w_n = u_n - 4000$ , on a  $u_n = w_n + 4000 = 6000 \times 0,95^n + 4000$

**Autres méthodes, astuces, notions... rencontrées :**

## Le cours – T° spé : Limites de suites définies explicitement

Prérequis : [généralités suites](#) ; [suites arithmétiques et géométriques](#)

### Les définitions :

- On dit que la suite  $(u_n)$  admet pour limite  $+\infty$  si **tout** intervalle  $]A; +\infty[$ ,  $A$  réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$
- On dit que la suite  $(u_n)$  admet pour limite  $-\infty$  si **tout** intervalle  $]-\infty; A[$ ,  $A$  réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$
- On dit que la suite  $(u_n)$  admet pour limite  $L$  si **tout** intervalle ouvert contenant  $L$  contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$ . Une telle suite est dite **convergente**.

### Limites des suites usuelles :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty ; \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty ; \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = +\infty ; \lim_{n \rightarrow +\infty} n^k = +\infty \text{ (pour } k \geq 1 \text{)}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 ; \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0 ; \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 0 ; \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0 \text{ (pour } k \geq 1 \text{)}$$

### Opérations sur les limites et formes indéterminées :

Les tableaux des opérations sur les limites ne sont pas à apprendre par cœur, mais à bien comprendre ! Voici quelques résultats d'opérations (attention à l'abus d'écriture à ne pas écrire sur une copie!) :

$$"(-\infty) \times (-\infty)" \rightarrow +\infty \quad " \frac{0^+}{-\infty} " \rightarrow 0^- \quad " \frac{3}{+\infty} " \rightarrow 0^+ \quad " \frac{+\infty}{0^-} " \rightarrow -\infty \quad " \frac{5}{0^+} " \rightarrow +\infty$$

### Les formes indéterminées à connaître par cœur

$$"(+\infty) - (+\infty)" \quad "0 \times \infty" \quad " \frac{\infty}{\infty} " \quad " \frac{0}{0} "$$

**2 méthodes** pour lever une indétermination : 1) factorisation par les plus hauts degrés 2) méthode du "conjugué"

### Limites de $q^n$ :

	$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n =$	Pas de limite	0	1	$+\infty$

### Théorèmes de comparaison et des gendarmes :

#### Théorème de comparaison (pour des limites infinies) :

- Si  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont deux suites telles que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  et, à partir d'un certain rang  $v_n \geq u_n$ , alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty .$$

- Si  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont deux suites telles que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$  et, à partir d'un certain rang  $v_n \leq u_n$ , alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty .$$

#### Théorème des gendarmes (pour des limites finies) :

Soit  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  et  $(w_n)$  trois suites telles que, à partir d'un certain rang  $u_n \leq v_n \leq w_n$ .

Si  $(u_n)$  et  $(w_n)$  convergent vers le réel  $L$ , alors  $(v_n)$  converge vers  $L$ .

## Les méthodes – T° spé : Limites de suites définies explicitement

### Calculs de limites simples :

1) Calculer la limite de la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_n = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + 2\right)(-n^3 + 1)$ .

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty, \text{ donc par quotient, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0^+ \text{ et ainsi } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + 2\right) = 2 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} -n^3 = -\infty \text{ et ainsi } \lim_{n \rightarrow +\infty} (-n^3 + 1) = -\infty \end{array} \right\} \text{ Par produit, nous obtenons : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + 2\right)(-n^3 + 1) = -\infty$$

2) Calculer la limite de la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_n = \frac{4}{n^2 + 5}$ .

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} 4 = 4 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 + 5) = +\infty \end{array} \right\} \text{ Par quotient, nous obtenons : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{n^2 + 5} = 0^+$$

3) Calculer la limite de la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_n = 0,6^n - 5^n$ .

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,6^n = 0 \text{ car } -1 < 0,6 < 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 5^n = +\infty \text{ car } 5 > 1, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} -5^n = -\infty \end{array} \right\} \text{ Par somme, nous obtenons : } \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,6^n - 5^n = -\infty$$

### Lever une indétermination :

1) Calculer la limite de la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_n = 2n^2 - 3n + 2$ .

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} 2n^2 = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} -3n + 2 = -\infty \end{array} \right\} \text{ Par somme, nous avons une forme indéterminée}$$

$$u_n = 2n^2 - 3n + 2 = n^2 \left(2 - \frac{3n}{n^2} + \frac{2}{n^2}\right) = n^2 \left(2 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}\right) \quad \text{NE PAS OUBLIER DE SIMPLIFIER !!}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n^2} = 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n} = 0, \text{ ainsi } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}\right) = 2 \end{array} \right\} \text{ Par produit, nous obtenons : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

2) Calculer la limite de la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_n = \frac{3n+1}{n^2+5}$ .

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} 3n+1 = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2+5 = +\infty \end{array} \right\} \text{ Par quotient, nous avons une forme indéterminée}$$

$$u_n = \frac{3n+1}{n^2+5} = \frac{n(3 + \frac{1}{n})}{n^2(1 + \frac{5}{n^2})} = \frac{(3 + \frac{1}{n})}{n(1 + \frac{5}{n^2})} \quad \text{NE PAS OUBLIER DE SIMPLIFIER !!}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{1}{n}\right) = 3 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{5}{n^2}\right) = 1, \text{ ainsi par produit } \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(1 + \frac{5}{n^2}\right) = +\infty \end{array} \right\} \text{ Par quotient, nous obtenons finalement : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0^*$$

3) Calculer la limite de la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_n = n - \sqrt{n}$ .

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} -\sqrt{n} = -\infty \end{array} \right\} \text{ Par somme, nous avons une forme indéterminée}$$

$$u_n = n - \sqrt{n} = n \left(1 - \frac{\sqrt{n}}{n}\right) = n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{NE PAS OUBLIER DE SIMPLIFIER : } \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} \times \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0, \text{ ainsi } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1 \end{array} \right\} \text{ Par produit, nous obtenons : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

4) Calculer la limite de la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_n = 3^n - 5^n$ .

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty \text{ car } 3 > 1, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 5^n = +\infty \text{ car } 5 > 1, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} -5^n = -\infty \end{array} \right\} \text{ Par somme, nous avons une forme indéterminée}$$

$$u_n = 3^n - 5^n = 5^n \left(\frac{3^n}{5^n} - 1\right) = 5^n \left(\left(\frac{3}{5}\right)^n - 1\right)$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} 5^n = +\infty \text{ car } 5 > 1, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0 \text{ car } -1 < \frac{3}{5} < 1, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{3}{5}\right)^n - 1\right) = -1 \end{array} \right\} \text{ Par produit, nous obtenons finalement : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$$

5) Calculer la limite de la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n+3}$ .

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1} = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} -\sqrt{n+3} = -\infty \end{array} \right\} \text{ Par somme, nous avons une forme indéterminée}$$

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n+3} = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n+3}) \times \frac{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+3})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+3})} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n+3}) \times (\sqrt{n+1} + \sqrt{n+3})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+3})} = \frac{(n+1) - (n+3)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+3}}$$

$$u_n = \frac{-2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+3}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} -2 = -2 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1} + \sqrt{n+3} = +\infty \end{array} \right\} \text{ Par quotient, nous obtenons finalement : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

**Utiliser le théorème de comparaison :**

Calculer la limite de la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_n = n^3 + (-1)^n$ .

$(-1)^n$  n'a pas de limite. On ne peut donc pas calculer la limite de  $(u_n)$  directement avec les opérations.

Nous savons que  $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ , donc  $n^3 - 1 \leq n^3 + (-1)^n \leq n^3 + 1$ . En particulier,  $n^3 - 1 < n^3 + (-1)^n$ .  
Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 - 1 = +\infty$ , donc **d'après le théorème de comparaison**,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

**Utiliser le théorème des gendarmes :**

Calculer la limite de la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_n = \frac{1}{\sqrt{n} - \cos(n)}$ .

$\cos(n)$  n'a pas de limite. On ne peut donc pas calculer la limite de  $(u_n)$  directement avec les opérations.  
Nous savons que  $-1 \leq \cos(n) \leq 1$ , donc :

$$\begin{aligned} -1 &\leq \cos(n) \leq 1 \\ 1 &\geq -\cos(n) \geq -1 \\ \sqrt{n} + 1 &\geq \sqrt{n} - \cos(n) \geq \sqrt{n} - 1 \\ \frac{1}{\sqrt{n} + 1} &\leq \frac{1}{\sqrt{n} - \cos(n)} \leq \frac{1}{\sqrt{n} - 1} \text{ car } \sqrt{n} + 1 \geq 0, \sqrt{n} - 1 \geq 0 \text{ et } \sqrt{n} - \cos(n) \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n} - 1} = 0.$$

Donc **d'après le théorème des gendarmes**,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

**Autres méthodes, astuces, notions... rencontrées :**

## Le cours – T° spé : Réurrence et convergence monotone

Prérequis : généralités suites, suites arithm et géométriques, limites de suites

### Raisonnement par récurrence :

$P(n)$  désigne une propriété concernant un entier naturel  $n$  et  $n_0$  désigne un entier naturel.

Si l'on démontre les deux étapes suivantes :

- **étape 1 (initialisation) :**  $P(n)$  est vraie pour l'entier  $n_0$  ;

- **étape 2 (hérédité) :** pour tout entier  $k \geq n_0$ , «  $P(k)$  est vraie » implique «  $P(k+1)$  est vraie » ;

Alors (conclusion) on peut conclure que  $P(n)$  est vraie pour tout entier  $n \geq n_0$ .

Dans un raisonnement par récurrence, pour démontrer l'hérédité :

On considère un entier  $k$ , avec  $k \geq n_0$ , et on suppose que la propriété est vraie au rang  $k$  ( $P(k)$  vraie). C'est l'**hypothèse de récurrence**. On démontre alors que la propriété est vraie au rang  $k+1$  ( $P(k+1)$  vraie) en utilisant l'hypothèse de récurrence.

### Suite majorée, minorée, bornée :

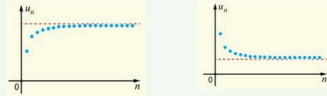
- La suite  $(u_n)$  est **majorée** s'il existe un réel  $M$  tel que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leq M$ .  $M$  est appelé **majorant** de  $(u_n)$ .
- La suite  $(u_n)$  est **minorée** s'il existe un réel  $m$  tel que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq m$ .  $m$  est appelé **minorant** de  $(u_n)$ .
- La suite  $(u_n)$  est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Soit  $(u_n)$  une suite croissante définie sur  $\mathbb{N}$ . Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$  alors la suite  $(u_n)$  est majorée par  $L$ .

Soit  $(u_n)$  une suite décroissante définie sur  $\mathbb{N}$ . Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$  alors la suite  $(u_n)$  est minorée par  $L$ .

### Théorème de convergence monotone :

- Si une suite **croissante et majorée** alors elle est **convergente**.
- Si une suite **décroissante et minorée** alors elle est **convergente**.



- Si une suite **croissante** est **non majorée** alors elle tend vers  $+\infty$ .
- Si une suite **décroissante** est **non minorée** alors elle tend vers  $-\infty$ .

### Unicité de la limite :

Si la suite  $(u_n)$  définie par récurrence par  $u_{n+1} = f(u_n)$  est **convergente** de limite  $L$ , alors cette limite  $L$  est solution de l'équation

$$L = f(L)$$

## Les méthodes – T° spé : Réurrence et convergence monotone

### Quelques démonstrations par récurrence :

1) On considère la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $u_{n+1} = 0,3u_n + 7$  et  $u_0 = 2$ .  
Démontrer par récurrence que  $u_n \leq 10$  pour tout entier naturel  $n$ .

**Solution :**

Soit  $P(n)$  la propriété :  $u_n \leq 10$ .

**Initialisation :**

$u_0 = 2 \leq 10$ , donc  $P(0)$  est vraie.

**Hérédité :**

Supposons que la propriété est vraie pour un nombre  $k \geq 0$ , c'est à dire  $u_k \leq 10$  (hypothèse de récurrence)

Démontrons alors que la propriété est vraie au rang  $k+1$  ( $u_{k+1} \leq 10$ ) :

En partant de l'hypothèse de récurrence, nous avons

$$u_k \leq 10$$

$$0,3 u_k \leq 3$$

$$0,3 u_k + 7 \leq 10$$

$$u_{k+1} \leq 10$$

La propriété est donc héréditaire.

**Conclusion :**

$P(0)$  est vraie et  $P(n)$  est héréditaire à partir du rang 0, donc  $P(n)$  est vraie pour tout  $n \geq 0$ .  
 $u_n \leq 10$

2) On considère la suite  $(v_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $v_{n+1} = v_n + 2n + 3$  et  $v_0 = 1$ .

Démontrer par récurrence que  $v_n = (n+1)^2$  pour tout entier naturel  $n$ .

**Solution :**

Soit  $P(n)$  la propriété :  $v_n = (n+1)^2$ .

**Initialisation :**

D'une part,  $v_0 = 1$  d'après l'énoncé.

D'autre part, pour  $n = 0$ ,  $(n+1)^2 = (0+1)^2 = 1$ .

Donc  $P(0)$  est vraie.

**Hérédité :**

Supposons que la propriété est vraie pour un nombre  $k \geq 0$ , c'est à dire  $v_k = (k+1)^2$  (hypothèse de récurrence)

Démontrons alors que la propriété est vraie au rang  $k+1$  ( $v_{k+1} = (k+1+1)^2 = (k+2)^2 = k^2 + 4k + 4$ ) :

D'après l'énoncé,

$$v_{k+1} = v_k + 2k + 3.$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, nous obtenons :

$$v_{k+1} = (k+1)^2 + 2k + 3 = k^2 + 2k + 1 + 2k + 3 = k^2 + 4k + 4$$

La propriété est donc héréditaire.

**Conclusion :**

$P(0)$  est vraie et  $P(n)$  est héréditaire à partir du rang 0, donc  $P(n)$  est vraie pour tout  $n \geq 0$ .  
 $v_n = (n+1)^2$

3) Montrer par récurrence que la suite  $(w_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $w_0 = 1$  et  $w_{n+1} = 2w_n - 3$ , est décroissante.

**Solution :**

Soit  $P(n)$  la propriété :  $w_{n+1} \leq w_n$  (la suite  $(w_n)$  est décroissante).

**Initialisation :**

D'une part,  $w_0 = 1$ .

D'autre part,  $w_1 = 2w_0 - 3 = 2 - 3 = -1$ .

Nous avons donc  $w_1 \leq w_0$ , donc  $P(0)$  est vraie.

**Hérédité :**

Supposons que la propriété est vraie pour un nombre  $k \geq 0$ , c'est à dire  $w_{k+1} \leq w_k$  (hypothèse de récurrence)

Démontrons alors que la propriété est vraie au rang  $k+1$  ( $w_{k+2} \leq w_{k+1}$ ) :

En partant de l'hypothèse de récurrence, nous avons

$$w_{k+1} \leq w_k$$

$$2w_{k+1} \leq 2w_k$$

$$2w_{k+1} - 3 \leq 2w_k - 3$$

$$w_{k+2} \leq w_{k+1}$$

La propriété est donc héréditaire.

**Conclusion :**

$P(0)$  est vraie et  $P(n)$  est héréditaire à partir du rang 0, donc  $P(n)$  est vraie pour tout  $n \geq 0$ .  
 $w_{n+1} \leq w_n$  et ainsi la suite  $(w_n)$  est décroissante

### Convergence d'une suite définie par récurrence :

On considère la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{14}{3}$  et  $u_0 = 1$

- 1) Démontrer par récurrence que  $(u_n)$  est majorée par 7.
- 2) En déduire que la suite  $(u_n)$  est croissante.
- 3) Conclure quant à la convergence de la suite  $(u_n)$ .
- 4) Calculer la limite  $L$  de la suite  $(u_n)$ .

#### Solution :

1) Soit  $P(n)$  la propriété :  $u_n \leq 7$  ( $(u_n)$  est majorée par 7).

#### Initialisation :

$u_0 = 1 \leq 7$ , donc  $P(0)$  est vraie.

#### Hérédité :

Supposons que la propriété est vraie pour un nombre  $k \geq 0$ , c'est à dire  $u_k \leq 7$  (hypothèse de récurrence)

Démontrons alors que la propriété est vraie au rang  $k+1$  ( $u_{k+1} \leq 7$ ) :

En partant de l'hypothèse de récurrence, nous avons

$$\begin{aligned} u_k &\leq 7 \\ \frac{1}{3}u_k &\leq \frac{7}{3} \\ \frac{1}{3}u_k + \frac{14}{3} &\leq \frac{7}{3} + \frac{14}{3} \\ \frac{1}{3}u_k + \frac{14}{3} &\leq \frac{21}{3} \\ u_{k+1} &\leq 7 \end{aligned}$$

La propriété est donc héréditaire.

#### Conclusion :

$P(0)$  est vraie et  $P(n)$  est héréditaire à partir du rang 0, donc  $P(n)$  est vraie pour tout  $n \geq 0$ .  
 $u_n \leq 7$

2) Pour étudier la **variation de la suite  $(u_n)$** , nous devons étudier le **signe de  $u_{n+1} - u_n$**  :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}u_n + \frac{14}{3} - u_n = -\frac{2}{3}u_n + \frac{14}{3}$$

Or, nous avons montré au 1) que  $u_n \leq 7$ , donc :

$$\begin{aligned} u_n &\leq 7 \\ -\frac{2}{3}u_n &\geq -\frac{14}{3} \\ -\frac{2}{3}u_n + \frac{14}{3} &\geq -\frac{14}{3} + \frac{14}{3} \\ u_{n+1} - u_n &\geq 0 \end{aligned}$$

Nous avons donc  $u_{n+1} \geq u_n$ , la suite  $(u_n)$  est croissante.

3) La suite  $(u_n)$  est croissante et majorée, donc la suite  $(u_n)$  est convergente.

4) la suite  $(u_n)$  étant convergente, on calcule la limite en résolvant l'équation :

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{3}L + \frac{14}{3} \\ \frac{2}{3}L &= \frac{14}{3} \\ L &= \frac{14}{3} \times \frac{3}{2} = 7 \end{aligned}$$

Nous avons donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 7$ .

**ATTENTION :**  
**Ce n'est pas parce que la suite est majorée par 7 que sa limite est 7 !**

### Récurrence et fonction :

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{3x}{1+2x}$  et la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_{n+1} = f(u_n)$  et  $u_0 = 0,7$ .

- 1) Étudier les variations de la fonction  $f$ .
- 2) Démontrer que  $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$ .
- 3) Conclure quant à la convergence de la suite  $(u_n)$ .

#### Solution :

1)  $f'(x) = \frac{3(1+2x) - 3x \times 2}{(1+2x)^2} = \frac{3}{(1+2x)^2} \geq 0$ , donc  $f$  est croissante sur  $]0; +\infty[$ .

2) Soit  $P(n)$  la propriété :  $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$ .

#### Initialisation :

D'une part  $u_0 = 0,7$ .

D'autre part  $u_1 = f(0,7) = \frac{2,1}{1+1,4} = 0,875$ .

Nous avons donc  $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 1$ .  $P(0)$  est vraie.

#### Hérédité :

Supposons que la propriété est vraie pour un nombre  $k \geq 0$ , c'est à dire  $0 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 1$  (hypothèse de récurrence)

Démontrons alors que la propriété est vraie au rang  $k+1$  ( $0 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 1$ ) :

En partant de l'hypothèse de récurrence, nous avons

$$\begin{aligned} 0 &\leq u_k \leq u_{k+1} \leq 1 \\ f(0) &\leq f(u_k) \leq f(u_{k+1}) \leq f(1) \text{ car } f \text{ est croissante.} \\ 0 &\leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 1 \end{aligned}$$

La propriété est donc héréditaire.

#### Conclusion :

$P(0)$  est vraie et  $P(n)$  est héréditaire à partir du rang 0, donc  $P(n)$  est vraie pour tout  $n \geq 0$ .  
 $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$

3) Nous avons démontré dans la question 2) que la suite  $(u_n)$  est croissante ( $u_n \leq u_{n+1}$ ) et qu'elle est majorée par 1 ( $u_n \leq 1$ ). Donc la suite  $(u_n)$  est convergente. On calcule sa limite en résolvant l'équation  $L = f(L)$  :

$$\begin{aligned} L &= \frac{3L}{1+2L} \\ L(1+2L) &= 3L \\ 2L^2 - 2L &= 0 \\ L(2L - 2) &= 0 \end{aligned}$$

Donc  $L = 0$  ou  $L = 1$ .

Comme la suite  $(u_n)$  est croissante et que  $u_0 = 0,7$ , la solution est  $L = 1$ .  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

### Autres méthodes, astuces, notions... rencontrées :

# Le cours – 1<sup>ère</sup> Spé : Second degré

Prérequis : Fonctions de référence

## Polynôme du second degré :

La fonction qui, à tout réel  $x$  associe  $ax^2 + bx + c$  où  $a$  est un réel non nul, est une **fonction polynôme du second degré**. Les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont les **coefficients de ce polynôme**. Soit  $f$  une fonction polynôme du second degré. Les **racines** de ce polynôme, si elles existent, sont les solutions de l'équation  $ax^2 + bx + c = 0$ .

## Forme factorisée :

Si  $f$  est une fonction polynôme du second degré **ayant deux racines distinctes**  $x_1$  et  $x_2$ , alors  $f$  peut s'écrire sous **forme factorisée** :  $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ . On a alors  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$  et  $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$ .

## Forme canonique :

Pour tout polynôme  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , il existe deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que :  
 $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ .  
 $a(x-\alpha)^2 + \beta$  est la **forme canonique** du polynôme  $ax^2 + bx + c$ . On a  $\alpha = -\frac{b}{2a}$  et  $\beta = f(\alpha)$ .  
 La représentation graphique de  $f$  est une **parabole** dont le sommet  $S$  a pour coordonnées  $S(\alpha; \beta)$ . La droite d'équation  $x = \alpha$  est un **axe de symétrie** de la parabole.

## Résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ :

Le réel  $b^2 - 4ac$ , noté  $\Delta$ , est appelé **discriminant** du polynôme  $ax^2 + bx + c$ .

Si  $\Delta > 0$ , l'équation du second degré a **deux solutions** distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

et la forme factorisée est  $ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$

Si  $\Delta = 0$ , l'équation du second degré a **une solution** :

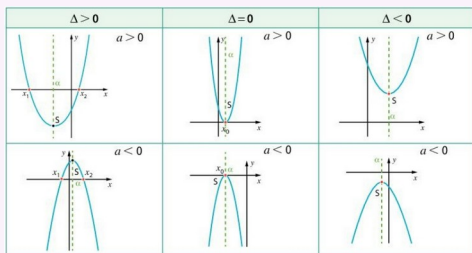
$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

et la forme factorisée est  $ax^2 + bx + c = a(x-x_0)^2$

Si  $\Delta < 0$ , l'équation du second degré n'a **pas de solution réelle**. Le polynôme ne peut pas être factorisé.

## Signe et variations du polynôme :

Signe de $\Delta$	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$																								
Signe de $f(x) = ax^2 + bx + c$	<table border="1"> <tr><td><math>x</math></td><td><math>-\infty</math></td><td><math>x_1</math></td><td><math>x_2</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr> <tr><td><math>f(x)</math></td><td>signe de <math>a</math></td><td>0</td><td>signe de <math>a</math></td><td>signe de <math>a</math></td></tr> </table>	$x$	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$	$f(x)$	signe de $a$	0	signe de $a$	signe de $a$	<table border="1"> <tr><td><math>x</math></td><td><math>-\infty</math></td><td><math>x_0</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr> <tr><td><math>f(x)</math></td><td>signe de <math>a</math></td><td>0</td><td>signe de <math>a</math></td></tr> </table>	$x$	$-\infty$	$x_0$	$+\infty$	$f(x)$	signe de $a$	0	signe de $a$	<table border="1"> <tr><td><math>x</math></td><td><math>-\infty</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr> <tr><td><math>f(x)</math></td><td colspan="2">signe de <math>a</math></td></tr> </table>	$x$	$-\infty$	$+\infty$	$f(x)$	signe de $a$	
$x$	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$																							
$f(x)$	signe de $a$	0	signe de $a$	signe de $a$																							
$x$	$-\infty$	$x_0$	$+\infty$																								
$f(x)$	signe de $a$	0	signe de $a$																								
$x$	$-\infty$	$+\infty$																									
$f(x)$	signe de $a$																										



# Les méthodes – 1<sup>ère</sup> Spé : Second degré

## Écrire sous forme canonique un polynôme du second degré :

Déterminer la forme canonique du trinôme  $f(x) = -x^2 + 2x - 5$ .

### Solutions :

#### Méthode n°1 :

$f$  est une fonction polynôme de degré 2, de coefficients  $a = -1$ ,  $b = 2$  et  $c = -5$ . Son écriture canonique est  $-(x-\alpha)^2 + \beta$  avec :  $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{-2} = 1$  et  $\beta = f(\alpha) = f(1) = -4$ .

Donc pour tout  $x$  réel,  $f(x) = -(x-1)^2 - 4$ .

#### Méthode n°2 :

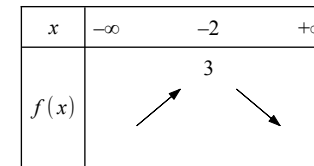
On factorise  $f$  par  $a = -1$  :  $f(x) = -(x^2 - 2x + 5)$ . Puis en remarquant que  $x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$ , on obtient :  
 $f(x) = -[(x-1)^2 - 1 + 5] = -(x-1)^2 - 4$ .

## Déterminer les variations d'une fonction polynôme de degré 2 :

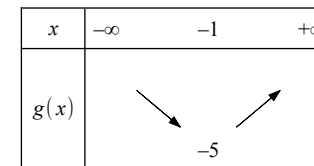
Étudier les variations des fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = 3 - (x+2)^2$  et  $g(x) = 2x^2 + 4x - 3$

### Solutions :

Pour  $f$ , on reconnaît la forme canonique avec  $a = -1$ ,  $\alpha = -2$  et  $\beta = 3$ . Le sommet de la parabole est donc  $S(-2; 3)$  et étant donné le signe de  $a$ ,  $f$  est strictement croissante sur  $]-\infty; -2]$  et strictement décroissante sur  $]-2; +\infty[$ .



Pour  $g$ , on a  $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{4} = -1$  et  $\beta = g(\alpha) = g(-1) = -5$ . Le sommet de la parabole est donc  $S(-1; -5)$  et étant donné le signe de  $a$ ,  $g$  est strictement décroissante sur  $]-\infty; -1]$  et strictement croissante sur  $]-1; +\infty[$ .



## Identifier la forme d'une fonction polynôme de degré 2 :

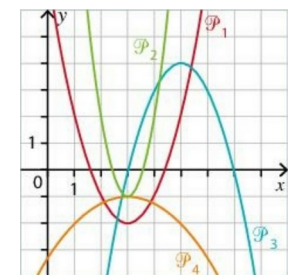
Sans calculatrice, associer chaque fonction polynôme ci-dessous à la parabole qui la représente.

$$f(x) = -1 + 3(x-3)^2,$$

$$g(x) = -1 - 0,25(x-3)^2$$

$$h(x) = x^2 - 6x + 7,$$

$$i(x) = (x-3)(7-x)$$



**Solutions :**

On peut écrire la fonction  $i : i(x) = -(x-3)(x-7)$ . C'est une forme factorisée. Les racines de  $i$  sont donc 3 et 7. Sa représentation graphique coupe donc l'axe des abscisses aux points  $(3; 0)$  et  $(7; 0)$  : il s'agit de  $\mathcal{P}_3$ .  
 $f$  est sous forme canonique. Elle admet un minimum (car  $a > 0$ ) pour  $x = 3$  qui vaut  $-1$ . Sa courbe représentative est  $\mathcal{P}_2$ .  
 $g$  est sous forme canonique. Elle admet un maximum (car  $a < 0$ ) pour  $x = 3$  qui vaut  $-1$ . Sa courbe représentative est  $\mathcal{P}_4$ .  
 Par élimination, la courbe représentative de  $h$  est  $\mathcal{P}_1$ .

**Résoudre une équation du second degré :**

Résoudre les équations suivantes :

1)  $x^2 - 3x + 1 = 0$       2)  $x^2 + x + 1 = 0$       3)  $0,3x^2 - 3x + 7,5 = 0$

**Solutions :**

1) On calcule le discriminant  $\Delta$ . On a  $a = 1, b = -3$  et  $c = 1$ .  $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 5$   
 $\Delta > 0$ , donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2 \times 1} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2 \times 1} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

2) On calcule le discriminant  $\Delta$ . On a  $a = 1, b = 1$  et  $c = 1$ .  $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3$   
 $\Delta < 0$ , donc l'équation n'admet pas de solution réelle.

3) On calcule le discriminant  $\Delta$ . On a  $a = 0,3, b = -3$  et  $c = 7,5$ .  $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 0,3 \times 7,5 = 0$   
 $\Delta = 0$ , donc l'équation admet une unique solution réelle :

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-3}{2 \times 0,3} = \frac{3}{0,6} = 5.$$

**Factoriser un trinôme du second degré :**

Déterminer les racines éventuelles et en déduire, si possible, une expression factorisée des trinômes suivants.

1)  $f(x) = 3x^2 - 2x + 2$       2)  $g(x) = -2x^2 + 5x + 3$       3)  $h(x) = 18x^2 - 12x + 2$

**Solutions :**

1)  $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 3 \times 2 = -20$   
 $\Delta < 0$ , donc  $f$  ne peut pas être factorisé.

2)  $\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times (-2) \times 3 = 49$   
 $\Delta > 0$ , donc  $g$  possède deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - 7}{2 \times (-2)} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 + 7}{2 \times (-2)} = -\frac{1}{2}$$

On peut donc factoriser  $g : g(x) = -2 \left( x - \left( -\frac{1}{2} \right) \right) (x - 3) = (-2x - 1)(x - 3)$

3)  $\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \times 18 \times 2 = 0$   
 $\Delta = 0$ , donc  $h$  possède une unique racine réelle :

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-12}{2 \times 18} = \frac{1}{3}.$$

On peut donc factoriser  $h : h(x) = 18 \left( x - \frac{1}{3} \right)^2$ .

**Détecter les racines d'un polynôme du second degré :**

Soit le polynôme  $f(x) = 5x^2 - 4x - 1$ . Trouver une racine évidente de  $f(x)$  et en déduire la deuxième racine.

**Solutions :**

Pour  $x = 1$ , on a  $f(1) = 5 \times 1^2 - 4 \times 1 - 1 = 0$ , donc 1 est une racine évidente. Soit  $x_2$  la deuxième racine.

$$1 \times x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{1}{5}, \text{ donc } x_2 = -\frac{1}{5}.$$

**Étudier le signe d'un trinôme du second degré :**

Étudier le signe des fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$  par : 1)  $f(x) = -3x^2 - 5x + 2$  et 2)  $g(x) = 2x^2 - 4x + 2,4$

**Solutions :**

1) Pour  $f, \Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times (-3) \times 2 = 49$ .

$\Delta > 0$ , donc le trinôme admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 - 7}{2 \times (-3)} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 + 7}{2 \times (-3)} = -2.$$

$a < 0$ , on obtient donc le tableau de signe suivant :

$x$	$-\infty$	$-2$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$		
$f(x)$		$-$	$0$	$+$	$0$	$-$

2) Pour  $g, \Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 2,4 = -3,2$ .

$\Delta < 0$ , donc le trinôme est du signe de  $a$  sur  $\mathbb{R}$ .

On obtient donc le tableau de signe suivant :

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$g(x)$		$+$

**Résoudre des inéquations :**

Résoudre les inéquations suivantes :

1)  $(2x + 1)(3 - x) > 0$       2)  $-2x^2 + 5x \leq 4$       3)  $(x - 4)^2 \leq (-5x + 2)^2$

**Solutions :**

$$(2x + 1)(3 - x) > 0$$

Le trinôme est sous forme

factorisée. Les racines sont  $-\frac{1}{2}$  et

3. Comme  $a < 0$  ( $a = -2$ ) :

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$3$	$+\infty$		
		$-$	$0$	$+$	$0$	$-$

$$\text{Donc } \mathcal{S} = \left] -\frac{1}{2}; 3 \right[$$

$$\begin{aligned} -2x^2 + 5x &\leq 4 \\ -2x^2 + 5x - 4 &\leq 0 \end{aligned}$$

$$\Delta = (5)^2 - 4 \times (-2) \times (-4) = -7$$

Le trinôme est du signe de  $a$  sur  $\mathbb{R}$ .

Comme  $a < 0$ ,

$$\mathcal{S} = \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} (x-4)^2 &\leq (-5x+2)^2 \\ (x-4)^2 - (-5x+2)^2 &\leq 0 \\ (x-4+5x-2)(x-4-5x+2) &\leq 0 \\ (6x-6)(-4x-2) &\leq 0 \end{aligned}$$

Le trinôme est sous forme factorisée. Les racines sont  $-\frac{1}{2}$  et 1. Comme  $a < 0$  ( $a = -24$ ) :

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$1$	$+\infty$		
		$-$	$0$	$+$	$0$	$-$

$$\text{Donc } \mathcal{S} = \left] -\infty; -\frac{1}{2} \right] \cup [1; +\infty[$$

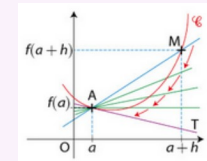
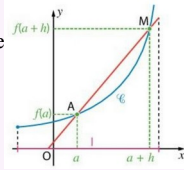
## Le cours – 1<sup>ère</sup> spé : Dérivation locale

### Nombre dérivé :

**Coefficient directeur** d'une droite  $(AB)$  :  $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ .

**Taux de variation entre  $a$  et  $b$**  :  $\tau = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ . Il s'agit de la **pen**te de la **sécante** à la courbe entre les points d'abscisses  $a$  et  $b$ .

**Taux de variation entre  $a$  et  $a+h$**  :  $\tau = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ . Il s'agit de la **pen**te de  $(AM)$ .



**Nombre dérivé en  $a$**  se note  $f'(a)$  :

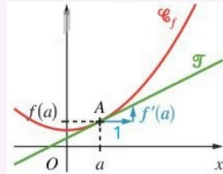
$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Il correspond au **coefficient directeur de la tangente** à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse  $a$ .

### Équation de tangente :

**Équation de la tangente** à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse  $a$  :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$



## Les méthodes – 1<sup>ère</sup> spé : Dérivation locale

### Calculer le taux de variation et la pente d'une sécante :

On considère la fonction  $f$ , définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = 2x^2 - x$ .

1) Calculer la pente de la sécante à la courbe de  $f$  entre le point d'abscisse 1 et le point d'abscisse 4.

2) Calculer le taux de variation de  $f$  entre 2 et  $2+h$ .

### Solutions :

1) La pente de la sécante à la courbe de  $f$  entre le point d'abscisse 1 et le point d'abscisse 4 est égale à  $\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1}$ .

Or,  $f(4) = 2 \times 4^2 - 4 = 28$  et  $f(1) = 2 \times 1^2 - 1 = 1$ .

Ainsi,  $\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{28 - 1}{3} = 9$ . La pente recherchée est donc égale à 9.

2) Le taux de variation de  $f$  entre 2 et  $2+h$  est :  $\tau = \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ .

On a  $f(2) = 2 \times 2^2 - 2 = 6$  et  $f(2+h) = 2 \times (2+h)^2 - (2+h) = 2 \times (4 + 4h + h^2) - (2+h) = 8 + 8h + 2h^2 - 2 - h = 2h^2 + 7h + 6$

Ainsi,  $\tau = \frac{2h^2 + 7h + 6 - 6}{h} = \frac{2h^2 + 7h}{h} = \frac{h(2h + 7)}{h} = 2h + 7$

Le taux de variation de  $f$  entre 2 et  $2+h$  est donc  $2h + 7$ .

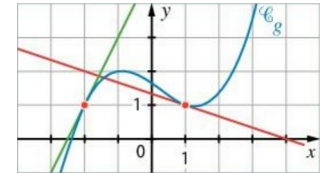
### Déterminer graphiquement un nombre dérivé :

On a tracé ci-contre la courbe représentative  $\mathcal{C}_g$  d'une fonction  $g$  ainsi que ses tangentes aux points d'abscisses -2 et 1.

1) Déterminer graphiquement le nombre dérivé de  $g$  en -2.

2) Déterminer graphiquement  $g'(1)$ .

3) Déterminer l'équation de la tangente à  $\mathcal{C}_g$  au point d'abscisse 1.



### Solution :

1) Le nombre dérivé de  $g$  en -2,  $g'(-2)$ , est la pente de la tangente à  $\mathcal{C}_g$  au point d'abscisse -2. D'après le graphique, les deux points de coordonnées (-2 ; 1) et (-1 ; 3) appartiennent à cette tangente (droite verte). On a donc :

$$g'(-2) = \frac{3 - 1}{-1 - (-2)} = 2.$$

2)  $g'(1)$  est la pente de la tangente à  $\mathcal{C}_g$  au point d'abscisse 1. D'après le graphique, les deux points de coordonnées (1 ; 1) et (4 ; 0) appartiennent à cette tangente (droite rouge). On a donc :

$$g'(1) = \frac{0 - 1}{4 - 1} = -\frac{1}{3}.$$

3) L'équation de la tangente à  $\mathcal{C}_g$  au point d'abscisse 1 est donnée par :  $y = g'(1)(x - 1) + g(1)$ . Par lecture graphique,  $g(1) = 1$ , et nous savons déjà que  $g'(1) = -\frac{1}{3}$ . Nous obtenons alors :

$$y = -\frac{1}{3}(x - 1) + 1 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} + 1 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$$

L'équation de la tangente à  $\mathcal{C}_g$  au point d'abscisse 1 est donc  $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ .

### Déterminer l'équation d'une tangente :

On considère la fonction  $f$ , définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  par :  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ .

1) Calculer  $f'(0)$ .

2) Déterminer l'équation de la tangente à  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse 0.

### Solution :

1) Le taux de variation de  $f$  entre 0 et  $0+h$  est :

$$\tau = \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{\frac{h+1}{h-1} - \frac{0+1}{0-1}}{h} = \frac{\frac{h+1}{h-1} + 1}{h} = \frac{\frac{h+1}{h-1} + \frac{h-1}{h-1}}{h} = \frac{\frac{2h}{h-1}}{h} = \frac{2h}{h-1} \times \frac{1}{h} = \frac{2}{h-1}$$

On a donc  $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{h-1} = -2$

2) L'équation de la tangente à  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse 0 est donnée par :  $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ .

Nous avons  $f(0) = -1$  et  $f'(0) = -2$ , d'où  $y = -2(x - 0) - 1 = -2x - 1$

L'équation de la tangente à  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse 0 est donc  $y = -2x - 1$ .

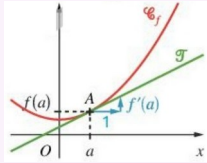
## Le cours – 1<sup>ère</sup> spé : fonctions dérivées

### Équation de tangente :

Équation de la tangente à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse  $a$  :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

$f'(a)$  correspond au **coefficient directeur de la tangente**.



### Dérivation des fonctions usuelles :

Fonction $f(x)$	Ensemble de définition	Fonction dérivée $f'(x)$	Ensemble de dérivabilité
$f(x) = k$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = mx + p$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = m$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$]0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$

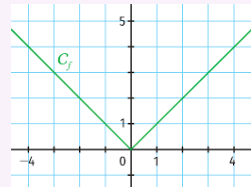
### Opérations sur les fonctions dérivées :

Type d'opération	Fonction à dériver	Fonction dérivée
Dérivée d'une <b>somme</b>	$u + v$	$u' + v'$
Dérivée d'un produit par une constante	$ku$	$ku'$
Dérivée d'un <b>produit</b>	$u \times v$	$u' \times v + u \times v'$
Dérivée d'un <b>inverse</b>	$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$
Dérivée d'un <b>quotient</b>	$\frac{u}{v}$	$\frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$
Composée exponentielle	$e^u$	$u' \times e^u$
<b>Composée</b>	$\frac{g(u)}{g(ax+b)}$	$\frac{u' \times g'(u)}{a \times g'(ax+b)}$

### Fonction valeur absolue :

$$f(x) = |x| \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} -x & , \text{si } x \leq 0 \\ x & , \text{si } x > 0 \end{cases}$$

La fonction valeur absolue **n'est pas dérivable en 0**.



## Les méthodes – 1<sup>ère</sup> spé : Fonctions dérivées

### Étudier la dérivabilité d'une fonction :

Soit  $a$  un nombre réel quelconque.

A l'aide du taux de variation, montrer que la fonction  $f(x) = x^2$  est dérivable en  $a$  puis retrouver l'expression de la dérivée de la fonction carré.

#### Solutions :

Pour étudier la dérivabilité de  $f$  en  $a$ , il faut tout d'abord s'intéresser aux taux de variation de  $f$  en  $a$  :

$$\tau_a = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \frac{2ah + h^2}{h} = 2a + h$$

Lorsque  $h$  devient très proche de zéro, cette quantité se rapproche de  $2a$  qui est un nombre fini. La fonction est donc dérivable en  $a$  et on a  $f'(a) = 2a$ .

### Déterminer la fonction dérivée :

Déterminer la fonction dérivée des fonctions suivantes, sans se soucier du domaine de dérivabilité.

1)  $f(x) = 3x + 5$     2)  $f(x) = \sqrt{x}$     3)  $f(x) = x^7$     4)  $f(x) = \sqrt{2}$     5)  $f(x) = -3 + 2x$

#### Solutions :

1)  $f'(x) = 3$     2)  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$     3)  $f'(x) = 7x^6$     4)  $f'(x) = 0$     5)  $f'(x) = 2$

### Déterminer la dérivabilité et la fonction dérivée :

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le ou les intervalle(s) sur le(s)quel(s) elle est dérivable et déterminer sa fonction dérivée.

1)  $f(x) = 7x^2 - 5x$     2)  $g(x) = \frac{3}{x}$     3)  $h(x) = \frac{3x+1}{2x^2+5}$     4)  $m(x) = \sqrt{x}(6x^3-2)$

#### Solutions :

1)  $f$  est une fonction polynôme donc dérivable sur  $\mathbb{R}$ .  $f' = u' + v'$ .  $u(x) = 7x^2$ , donc  $u'(x) = 14x$  et  $v(x) = -5x$ , donc  $v'(x) = -5$ . On en déduit  $f'(x) = 14x - 5$ .

2)  $g$  est de la forme  $ku$  avec  $k=3$  et  $u(x) = \frac{1}{x}$ . Donc  $g$  est dérivable sur  $] -\infty; 0[ \cup ] 0; +\infty[$ .

$$g'(x) = k u'(x) = 3 \times \left( -\frac{1}{x^2} \right) = -\frac{3}{x^2}$$

3)  $h$  est un quotient de deux fonctions  $u(x) = 3x+1$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $v(x) = 2x^2+5$  dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et, pour tout réel  $x$ ,  $v(x) \geq 5 > 0$ , donc  $v$  ne s'annule pas. La fonction  $h$  est donc dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $h' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ . On obtient donc :

$$h' = \frac{3 \times (2x^2+5) - (3x+1) \times 4x}{(2x^2+5)^2} = \frac{6x^2+15 - (12x^2+4x)}{(2x^2+5)^2} = \frac{6x^2+15-12x^2-4x}{(2x^2+5)^2} = \frac{-6x^2-4x+15}{(2x^2+5)^2}$$

4)  $h$  est le produit de deux fonctions  $u(x) = \sqrt{x}$  dérivable sur  $]0; +\infty[$  et  $v(x) = 6x^3-2$  dérivable sur  $\mathbb{R}$ . On en déduit que  $m$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$ , et  $m' = u'v + uv'$ . On obtient donc :

$$m' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times (6x^3-2) + \sqrt{x} \times 18x^2 = \frac{3x^3-1}{\sqrt{x}} + \frac{x \times 18x^2}{\sqrt{x}} = \frac{21x^3-1}{\sqrt{x}}$$

# Le cours – 1<sup>ère</sup> spé : Application dérivation

Prérequis : Dérivation locale, fonctions dérivées

## Variations :

Si  $f$  est **croissante** sur  $I$  si et seulement si,  $f'(x) \geq 0$  sur  $I$ .

$f$  est **décroissante** sur  $I$  si et seulement si,  $f'(x) \leq 0$  sur  $I$ .

$f$  est **constante** sur  $I$  si et seulement si,  $f'(x) = 0$  sur  $I$ .

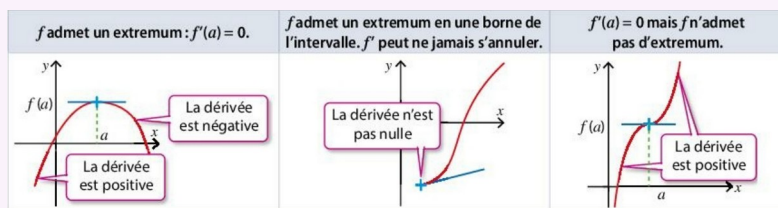
Exemple de tableau de variations :

$x$	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗ 10 ↘		

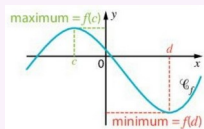
## Extremums :

$f$  admet un **maximum** sur  $I$ , atteint en  $c$  signifie  $f(x) \leq f(c)$  sur  $I$ .  $f(c)$  est le **maximum** de  $f$  sur  $I$ .

$f$  admet un **minimum** sur  $I$ , atteint en  $c$  signifie  $f(x) \geq f(c)$  sur  $I$ .  $f(c)$  est le **minimum** de  $f$  sur  $I$ .



Si  $f'$  s'annule en changeant de signe en  $a$ , alors  $f$  admet un **extremum local** en  $a$ . La **tangente** à la courbe représentative de  $f$  au point d'abscisse  $a$  est alors **parallèle à l'axe des abscisses**.



## Signe d'une fonction à partir de son tableau de variation :

Exemples :

$x$	$a$
$f(x)$	↗ 0 ↘
Signe de $f(x)$	-   0   +

$x$	$a$
$f(x)$	↘ négatif ↗
Signe de $f(x)$	-

# Les méthodes – 1<sup>ère</sup> spé : Application dérivation

## Étudier les variations d'une fonction

On donne la fonction  $f$  définie sur  $[-3; 3]$  par  $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 2x + 1$ .

- Déterminer l'expression de la dérivée de  $f$  et étudier son signe.
- En déduire le sens de variation de  $f$  et dresser son tableau de variation.
- En déduire les extremums de la fonction et préciser en quelles valeurs ils sont atteints.

## Solutions :

1) La dérivée de la fonction  $f$  a pour expression :  $f'(x) = \frac{2}{3} \times 3x^2 - \frac{3}{2} \times 2x - 2 = 2x^2 - 3x - 2$ .  $f'$  est une fonction polynôme de degré 2. On étudie son signe :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 25.$$

$\Delta > 0$ , donc le trinôme admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 - 5}{2 \times 2} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 + 5}{2 \times 2} = 2.$$

$a > 0$ , donc  $f'$  est négative entre les racines, donc sur  $\left[-\frac{1}{2}; 2\right]$ , et positive à l'extérieur des racines, donc sur  $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup [2; +\infty[$ .

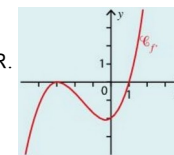
2) On obtient le tableau de variation suivant :

$x$	-3	$-\frac{1}{2}$	2	3	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f$	$-\frac{49}{2}$	↗ $\frac{37}{24}$	↘ $-\frac{11}{3}$	↗ $-\frac{1}{2}$	

3) D'après le tableau de variation, le minimum de  $f$  est  $-\frac{49}{2}$  atteint pour  $x = -3$  et le maximum de  $f$  est  $\frac{37}{24}$  atteint pour  $x = -\frac{1}{2}$ .

## Utiliser la courbe représentative de $f'$

On donne ci-contre la courbe représentative de la fonction dérivée d'une fonction  $f$  dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Déterminer les valeurs pour lesquelles la fonction  $f$  admet des extremums.



## Solutions :

Grace au graphique, nous pouvons déterminer le signe de  $f'$  et donc les variations de  $f$ . On obtient le tableau de variation suivant :

$x$	$-\infty$	-3	1	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	-	0	+
$f$	↘ ↗				

$f$  admet donc un minimum en 1. Les données ne nous permettent pas de déterminer la valeur de ce minimum.

### Étudier la position relative de deux courbes

On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = -9x^3 + 27x^2 + 4$  et  $g(x) = 27x - 5$  et leurs courbes représentatives  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  dans un repère. Montrer que le point  $(1; 22)$  est commun aux deux courbes et déterminer la position relative de ces deux courbes.

#### Solutions :

$f(1) = -9 + 27 + 4 = 22$  et  $g(1) = 27 - 5 = 22$  donc le point  $(1; 22)$  est bien commun aux deux courbes.

**Pour étudier la position relative des courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$ , il faut étudier le signe de  $f(x) - g(x)$  :**

$$f(x) - g(x) = -9x^3 + 27x^2 + 4 - 27x + 5 = -9x^3 + 27x^2 - 27x + 9 = -9(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = -9(x-1)^3$$

$(x-1)^3$  est du signe de  $x-1$ , donc le signe de  $-9(x-1)^3$  est du signe opposé à  $x-1$  :

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$-9(x-1)^3$		$+$	$0$ $-$

On en déduit que  $\mathcal{C}_f$  est au dessus de  $\mathcal{C}_g$  sur  $]-\infty; 1[$  et que  $\mathcal{C}_f$  est en dessous de  $\mathcal{C}_g$  sur  $]1; +\infty[$ .

### Exploiter les variations pour déterminer un signe

Soit la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3 + 5x - 18$ .

- 1) Démontrer que la fonction  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ .
- 2) Calculer  $f(2)$  et en déduire le signe de  $f(x)$ .
- 3) Montrer que, pour tout  $x \geq 2$ , on a  $x^3 \geq -5x + 18$ .

#### Solutions :

- 1)  $f'(x) = 3x^2 + 5$ . Puisque  $f'(x)$  est la somme de deux termes positifs, alors  $f'(x)$  est positif. Donc  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ .
- 2)  $f(2) = 2^3 + 5 \times 2 - 18 = 0$ . Puisque  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ , on en déduit que, pour  $x \leq 2$ ,  $f(x) \leq 0$  et que, pour  $x \geq 2$ ,  $f(x) \geq 0$ .
- 3) D'après la question précédente, pour  $x \geq 2$  on a  $x^3 + 5x - 18 \geq 0$  soit  $x^3 \geq -5x + 18$ .

### Autres méthodes, astuces, notions... rencontrées :

## Le cours – 1<sup>ère</sup> spé : Fonction exponentielle

### Définition :

On appelle **fonction exponentielle** l'unique fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle que  $f' = f$  et  $f(0) = 1$ .

On note cette fonction  $f(x) = \exp(x)$ . On la note aussi  $\exp(x) = e^x$ .

On a ainsi  $\exp(1) = e$ . La valeur approchée de  $e$  est  $e \approx 2,71828$

### Fonction exponentielle :

La fonction exponentielle est **strictement positive** sur  $\mathbb{R}$ .

$$e^x > 0$$

La fonction exponentielle est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et sa dérivée est (par définition)

$$(e^x)' = e^x$$

La fonction exponentielle est **strictement croissante** sur  $\mathbb{R}$ .

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$(e^x)'$		+
$e^x$		$+\infty$
	0	



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

(programme de terminale)

$$e^0 = 1$$

$$e^1 = e$$

### Résolution d'équations, inéquations :

exemples

$$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$$

$$e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$$

$$e^{x+3} = e^2 \Leftrightarrow x+3=2 \dots$$

$$e^{2x+1} > 1 \Leftrightarrow e^{2x+1} > e^0 \Leftrightarrow 2x+1 > 0 \dots$$

### Dérivée d'une composée :

$$(e^{u(x)})' = u'(x)e^{u(x)}$$

### Relation fonctionnelle et propriétés algébriques :

$$e^{x+y} = e^x \times e^y$$

$$e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

$$(e^x)^n = e^{nx}$$

## Les méthodes – 1<sup>ère</sup> spé : Fonction exponentielle

### Résolutions d'équations, inéquations :

**Résoudre**  $e^{2x+3} = e^x$

$$e^{2x+3} = e^x$$

$$\Leftrightarrow 2x+3 = x$$

$$\Leftrightarrow x = -3$$

La solution est donc :

$$S = \{-3\}$$

**Résoudre**  $2e^x + 5 = 7$

$$2e^x + 5 = 7$$

$$\Leftrightarrow 2e^x = 2$$

$$\Leftrightarrow e^x = 1$$

$$\Leftrightarrow e^x = e^0$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

La solution est donc :

$$S = \{0\}$$

**Résoudre**  $e^x - 1 \geq 0$

$$e^x \geq 1$$

$$\Leftrightarrow e^x \geq e^0$$

$$\Leftrightarrow x \geq 0$$

La solution est donc :

$$S = [0; +\infty[$$

L'astuce de  
remplacer 1 par  $e^0$   
est souvent utilisée

**Résoudre**  $\frac{e^{x+3} \times e^{2-x}}{e^{-x^2+3}} \geq e^6$

$$\frac{e^{x+3} \times e^{2-x}}{e^{-x^2+3}} \geq e^6$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{(x+3)+(2-x)}}{e^{-x^2+3}} \geq e^6$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^5}{e^{-x^2+3}} \geq e^6$$

$$\Leftrightarrow e^{5-(-x^2+3)} \geq e^6$$

$$\Leftrightarrow e^{x^2+2} \geq e^6$$

$$\Leftrightarrow x^2+2 \geq 6$$

$$\Leftrightarrow x^2-4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x+2) \geq 0$$

Second degré à bien  
réviser !

$x$	$-\infty$	$-2$	$2$	$+\infty$
$x+2$		-	0	+
$x-2$		-	0	+
$(x-2)(x+2)$		+	0	+

Avec le tableau de signe, on trouve finalement  $S = ]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$

### Simplifications :

**Simplifier le nombre**  $A = \frac{e \times e^{2-2x} \times (e^x)^5}{e^{x-2}}$

$$e = e^1$$

$$A = \frac{e \times e^{2-2x} \times (e^x)^5}{e^{x-2}}$$

$$A = \frac{e^{-2x+3} \times (e^x)^5}{e^{x-2}}$$

$$A = \frac{e^{3x+3}}{e^{x-2}}$$

$$A = \frac{e^1 \times e^{2-2x} \times (e^x)^5}{e^{x-2}}$$

$$A = \frac{e^{-2x+3} \times e^{5x}}{e^{x-2}}$$

$$A = e^{(3x+3)-(x-2)}$$

$$A = \frac{e^{2-2x+1} \times (e^x)^5}{e^{x-2}}$$

$$A = \frac{e^{-2x+3+5x}}{e^{x-2}}$$

$$A = e^{2x+5}$$

**Études de fonctions :**

1) Étudier de la fonction  $f(x) = x - e^x$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

$f'(x) = 1 - e^x$ . Pour étudier le signe de  $f'$ , on résout l'inéquation  $1 - e^x \geq 0$  :

$$1 - e^x \geq 0$$

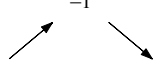
$$e^x \leq 1$$

$$e^x \leq e^0$$

$$x \leq 0$$

Donc  $f'(x) \geq 0$  sur  $]-\infty; 0]$ . De même,  $f'(x) \leq 0$  sur  $[0; +\infty[$ .

On obtient donc le tableau de variations :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$
$f(x)$	$-1$ 		

2) Étudier de la fonction  $f(x) = e^{-2x+3}$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

$f$  est de la forme  $f(x) = e^u$ .

On a donc  $f'(x) = -2e^{-2x+3}$ .

Or,  $e^{-2x+3} > 0$ , donc  $-2e^{-2x+3} < 0$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Il y a souvent des signes "évidents" !**

$f'(x) \leq 0$ , donc la fonction  $f$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ .

**Autres méthodes, astuces, notions... rencontrées :**

# Le cours – T° spé : Compléments fonctions et TVI

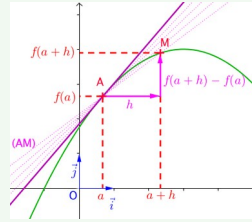
Prérequis : fonctions dérivées, application dérivation, fonction exponentielle

## Nombre dérivé, tangente et continuité :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{ou} \quad f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$f'(a)$  est le **nombre dérivé en a**. Il correspond au **coefficient directeur de la tangente** à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse  $a$ .

**Équation de la tangente** à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse  $a$  :  $y = f'(a)(x - a) + f(a)$



**Continuité** :  $f$  est **continue en a** si :  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur un intervalle  $I$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors la somme  $f + g$ , le produit  $\lambda \times f$ , le produit  $f \times g$ ,  $f^n$  (ou  $n$  est un entier naturel non nul) et  $f \circ g$  sont continus sur  $I$ . Si de plus  $g$  ne s'annule pas sur  $I$  alors les fonctions  $\frac{1}{g}$  et  $\frac{f}{g}$  sont continus sur  $I$ .

et  $\frac{f}{g}$  sont continus sur  $I$ .

Une fonction **dérivable** sur un intervalle  $I$  est **continue** sur cet intervalle.

## Dérivées des fonctions composées :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

**Exemple** : si  $f(x) = 2x + 6$  et  $g(x) = \sqrt{x}$ , alors :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{2x + 6} \quad \text{et} \quad (f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2\sqrt{x} + 6$$

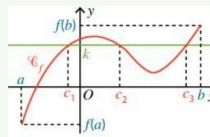
**Attention aux ensembles de définition !**

Fonction	Dérivée	Exemple
$f(x) = (u(x))^n$	$f'(x) = n \times u'(x) \times (u(x))^{n-1}$	$f(x) = (2x + 6)^5$ $f'(x) = 5 \times 2 \times (2x + 6)^4 = 10(2x + 6)^4$
$f(x) = \sqrt{u(x)}$	$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	$f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$ $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 3}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}$
$f(x) = e^{u(x)}$	$f'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$	$f(x) = e^{x^2 + 1}$ $f'(x) = 3x^2 e^{x^2 + 1}$
$(g \circ f)$	$f' \times (g' \circ f)$	

## Théorème des valeurs intermédiaires et son corollaire :

### Théorème des valeurs intermédiaires :

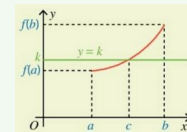
On considère la fonction  $f$  **définie** et **continue** sur un intervalle  $[a; b]$ . Pour tout réel  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , il existe **au moins** un réel  $c$  compris entre  $a$  et  $b$  tel que  $f(c) = k$ .



Dans ces conditions, l'équation  $f(x) = k$  admet **au moins** une solution dans l'intervalle  $[a; b]$ .

### Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires :

On considère la fonction  $f$  **définie**, **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle  $[a; b]$ , alors, pour tout nombre  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , l'équation  $f(x) = k$  possède une **unique solution** dans l'intervalle  $[a; b]$ .



# Les méthodes – T° spé : Compléments fonctions et TVI

## Étude d'une fonction composée :

On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \sqrt{\frac{2x}{3x+1}}$ .

- Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .
- Étudier les variations de  $f$ .

### Solutions :

1)  $f$  est définie si  $\frac{2x}{3x+1} \geq 0$ . Il nous faut donc étudier son signe :

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$0$	$+\infty$	
$2x$	$-$	$:$	$-$	$0$	$+$
$3x+1$	$-$	$0$	$+$	$:$	$+$
$\frac{2x}{3x+1}$	$+$	$  $	$-$	$0$	$+$

On en déduit que  $f$  est définie sur l'intervalle  $D_f = ]-\infty; -\frac{1}{3}[ \cup ]0; +\infty[$ .

2)  $f$  est de la forme  $f(x) = \sqrt{u(x)}$  avec  $u(x) = \frac{2x}{3x+1}$ . On a  $u'(x) = \frac{2(3x+1) - 3 \times 2x}{(3x+1)^2} = \frac{2}{(3x+1)^2}$ .

On en déduit :  $f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{\frac{2}{(3x+1)^2}}{2\sqrt{\frac{2x}{3x+1}}} = \frac{1}{(3x+1)^2 \sqrt{\frac{2x}{3x+1}}} > 0$  sur  $D_f$ .

La fonction  $f$  est donc croissante sur son ensemble de définition.

## Utilisation du théorème des valeurs intermédiaires :

1) On considère la fonction  $g$ , définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = x^3 - 3x - 3$ .

a) Étudier le sens de variation de  $g$ . On donne les résultats suivants :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ . Dresser son

tableau de variation.

b) Calculer  $g(3)$ .

c) Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution dans  $\mathbb{R}$ , que l'on notera  $\alpha$ .

d) A l'aide de la calculatrice, donner la valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-2}$ .

e) A l'aide des résultats précédents, établir le tableau de signe de  $g(x)$ .

2)  $f$  est la fonction définie, pour tout réel  $x$  différent de  $-1$  et  $1$  par  $f(x) = \frac{2x^3 + 3}{x^2 - 1}$ .

a) Démontrer que, pour tout réel  $x$  différent de  $-1$  et de  $1$  :  $f'(x) = \frac{2xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$ .

b) Étudier le sens de variation de  $f$  puis dresser son tableau de variation.

c) Démontrer que  $f(\alpha) = \frac{3(2\alpha + 3)}{\alpha^2 - 1}$

### Solution :

1) a)  $g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$ . On obtient le tableau de variation suivant :

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$	
$g'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$g$		$-1$		$+\infty$	
	$-\infty$		$-5$		

b)  $g(3)=14$

c) Sur  $]-\infty; 1]$ , le maximum de  $g$  est  $-1$ . Donc l'équation  $g(x)=0$  n'a pas de solution sur cet intervalle.

Sur  $[1; +\infty[$ , la fonction  $g$  est continue et strictement croissante.

$$\left. \begin{array}{l} g(1) = -5 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \end{array} \right\} 0 \in ]-5; +\infty[$$



D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaire, l'équation  $g(x)=0$  admet une unique solution dans  $[1; +\infty[$ , et donc dans  $\mathbb{R}$ .

d) A l'aide de la calculatrice, on obtient  $\alpha \approx 2,10$ . (On peut utiliser la fonction **G-Solv**  $\rightarrow$  **X-CAL** sur Casio)

e) Compte tenu des variations de  $g$  et des questions précédentes, on obtient le tableau de signes suivant :

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$g$	$-$	$0$	$+$

2) a)  $f'(x) = \frac{6x^2(x^2-1) - 2x(2x^3+3)}{(x^2-1)^2} = \frac{2x(3x(x^2-1) - (2x^3+3))}{(x^2-1)^2} = \frac{2xg(x)}{(x^2-1)^2}$ .

b) Le signe de  $f'$  dépend du signe de  $x$  et de  $g(x)$  (trouvé au 1) e). On a donc le tableau de variation suivant :

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$\alpha$	$+\infty$			
$f'(x)$	$+$	$+$	$0$	$-$	$-$	$0$	$+$		
$f(x)$		$+\infty$		$-3$		$+\infty$		$+\infty$	
	$-\infty$		$-\infty$		$-\infty$		$f(\alpha)$		$+\infty$

c) Nous savons que  $g(\alpha)=0$ . Donc  $\alpha^3 - 3\alpha - 3 = 0$  et ainsi  $\alpha^3 = 3\alpha + 3$ .

$$f(\alpha) = \frac{2\alpha^3 + 3}{\alpha^2 - 1} = \frac{6\alpha + 9}{\alpha^2 - 1} = \frac{3(2\alpha + 3)}{\alpha^2 - 1}$$

### Étudier la continuité :

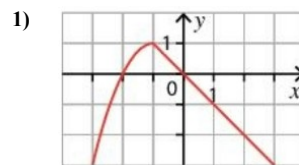
On considère la fonction  $f$ , définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x & \text{si } x \leq -1 \\ -x & \text{si } x > -1 \end{cases}$

1) Tracer la courbe représentative de  $f$  dans un repère.

2) Étudier la continuité de  $f$  :

- a) sur  $]-\infty; -1]$       b) sur  $]-1; +\infty[$       c) en  $-1$

### Solution :



2)

a) La fonction  $x \rightarrow -x^2 - 2x$  est une fonction polynôme, donc elle est continue sur  $\mathbb{R}$  et donc sur  $]-\infty; -1]$ .

b) La fonction  $x \rightarrow -x$  est une fonction affine, donc elle est continue sur  $\mathbb{R}$  et donc sur  $]-1; +\infty[$ .

c) Nous avons  $f(-1) = -(-1)^2 - 2 \times (-1) = 1$ . Ensuite,

d'une part  $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} -x^2 - 2x = -(-1)^2 - 2 \times (-1) = 1$ ,

d'autre part  $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} -x = -(-1) = 1$ .

Ainsi,  $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = f(-1) = 1$ , donc  $f$  est continue en  $-1$ .

### Tangente et position relative :

On considère la fonction  $f$ , définie sur  $[0; 6]$  par :  $f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x$ .

1) Déterminer l'équation de la tangente  $T$  à la courbe représentative de la fonction  $f$  au point d'abscisse 4.

2) Démontrer que  $f(x) - (-12x + 64) = (x-4)^3$ .

3) En déduire la position relative de la courbe représentative de la fonction  $f$  par rapport à la tangente  $T$ .

### Solution :

1) Pour déterminer l'équation de la tangente, nous avons besoin de  $f'$  :  $f'(x) = 3x^2 - 24x + 36$ .

$$f(4) = 4^3 - 12 \times 4^2 + 36 \times 4 = 16$$

$$f'(4) = 3 \times 4^2 - 24 \times 4 + 36 = -12$$

On a donc :

$$T: y = f'(4)(x-4) + f(4) = -12(x-4) + 16 = -12x + 64.$$

2)  $f(x) - (-12x + 64) = x^3 - 12x^2 + 36x + 12x - 64 = x^3 - 12x^2 + 48x - 64$ .

Or,  $(x-4)^3 = (x-4)^2 \times (x-4) = (x^2 - 8x + 16)(x-4) = x^3 - 12x^2 + 48x - 64$ .

Nous avons donc bien  $f(x) - (-12x + 64) = (x-4)^3$

3) Pour étudier la position relative de  $\mathcal{C}_f$  et  $T$ , il nous faut étudier le signe de  $f(x) - (-12x + 64)$  :

$f(x) - (-12x + 64) = (x-4)^3$ . Le signe de  $(x-4)^3$  est le même que celui de  $x-4$  :

$x$	$0$	$4$	$6$
$x-4$	$-$	$0$	$+$



Donc, sur  $[0; 4]$ ,  $\mathcal{C}_f$  est située en dessous de  $T$  et sur  $[4; 6]$ ,  $\mathcal{C}_f$  est située au dessus de  $T$ .

## Le cours – T° spé : Limites de fonctions

Prérequis : [fonction exponentielle](#), [limites de suites](#), [compléments fonctions](#)

### Les définitions :

➤ Les définitions des limites de fonctions en  $+\infty$  sont équivalentes à celles des suites (voir [limites de suites](#)). On peut énoncer des définitions équivalentes en  $-\infty$

➤ On dit que la fonction  $f$  admet pour limite  $+\infty$  (ou  $-\infty$ ) en  $A$  si tout intervalle  $]a; +\infty[$  (ou  $]-\infty; b]$ ,  $a$  et  $b$  réels, contient toutes les valeurs de  $f(x)$  dès que  $x$  est suffisamment proche de  $A$  et on note :  $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = +\infty$  (ou  $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = -\infty$ ).

➤ La droite d'équation  $y = L$  est **asymptote horizontale** à la courbe représentative de la fonction  $f$  en  $+\infty$  (ou  $-\infty$ ) si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$  (ou  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ )

➤ La droite d'équation  $x = A$  est **asymptote verticale** à la courbe représentative de la fonction  $f$  si  $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = -\infty$  ou  $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = +\infty$

### Limites des fonctions usuelles :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

### Opérations sur les limites, formes indéterminées et composition :

Les tableaux des opérations sur les limites sont les mêmes que pour les suites (voir [limites de suites](#)). Voici quelques résultats d'opérations (attention à l'abus d'écriture à ne pas écrire sur une copie!) :

$$"(-\infty) \times (-\infty)" \rightarrow +\infty \quad " \frac{0^+}{-\infty} " \rightarrow 0^- \quad " \frac{3}{+\infty} " \rightarrow 0^+ \quad " \frac{+\infty}{0^-} " \rightarrow -\infty \quad " \frac{5}{0^+} " \rightarrow +\infty$$

Les 4 formes indéterminées à connaître par cœur :

$$"(+\infty) - (+\infty)" \quad "0 \times \infty" \quad " \frac{\infty}{\infty} " \quad " \frac{0}{0} "$$

### Composition de fonctions :

$a, b$  et  $c$  désignent des nombres réels ou  $+\infty$  ou  $-\infty$ .  $f$  et  $g$  sont des fonctions.

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \text{ et } \lim_{X \rightarrow b} g(X) = c, \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c$$

### Théorèmes de comparaison et des gendarmes :

Théorèmes de comparaison et des gendarmes pour les fonctions identiques à ceux des suites (voir [limites de suites](#)). On a les théorèmes analogues en  $-\infty$ .

### Croissances comparées pour la fonction exponentielle :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty, n \geq 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0, n \geq 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

## Les méthodes – T° spé : Limites de fonctions

### Étude asymptotique d'une fonction :

Soit la fonction  $f$  définie sur  $]-\infty; 3[ \cup ]3; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$ . Calculer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition. En déduire les éventuelles asymptotes.

Limite en  $+\infty$  :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x+1 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x-3 = +\infty \end{array} \right\} \text{ Par quotient, nous avons une forme indéterminée}$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x-3} = \frac{x(1 + \frac{1}{x})}{x(1 - \frac{3}{x})} = \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{3}{x}}$$

NE PAS OUBLIER DE SIMPLIFIER !!

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{x}) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \frac{3}{x}) = 1 \end{array} \right\} \text{ Par quotient, nous obtenons finalement : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

La droite d'équation  $y = 1$  est donc **asymptote horizontale** à la courbe représentative de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .

Limite en  $-\infty$  :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} x+1 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x-3 = -\infty \end{array} \right\} \text{ Par quotient, nous avons une forme indéterminée}$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x-3} = \frac{x(1 + \frac{1}{x})}{x(1 - \frac{3}{x})} = \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{3}{x}}$$

NE PAS OUBLIER DE SIMPLIFIER !!

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + \frac{1}{x}) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - \frac{3}{x}) = 1 \end{array} \right\} \text{ Par quotient, nous obtenons finalement : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

La droite d'équation  $y = 1$  est donc **asymptote horizontale** à la courbe représentative de la fonction  $f$  en  $-\infty$ .

Limite en 3 à gauche :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} x+1 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} x-3 = 0^- \end{array} \right\} \text{ Par quotient, nous obtenons : } \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$$

Ici, il ne faut pas oublier le signe du 0. C'est lui qui détermine le signe de la limite !

Limite en 3 à droite :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^+} x+1 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} x-3 = 0^+ \end{array} \right\} \text{ Par quotient, nous obtenons : } \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$$

La droite d'équation  $x = 3$  est donc **asymptote verticale** à la courbe représentative de la fonction  $f$  (à gauche et à droite).

### Limites de fonctions composées :

1) Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^{2x^2+3}$ . Calculer la limites de  $f$  en  $-\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^2+3 = +\infty, \quad \lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty, \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

2) Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x^4+1}}$ . Calculer la limites de  $f$  en  $-\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^4+1 = +\infty, \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^4+1} = 0. \quad \lim_{X \rightarrow 0} \sqrt{X} = 0, \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

### Utiliser les théorèmes de comparaison et des gendarmes :

1) Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^x \cos(x)$ . Calculer la limites de  $f$  en  $-\infty$ .

$\cos(x)$  n'a pas de limite en  $-\infty$ . On ne peut donc pas calculer la limite de  $f$  directement avec les opérations.

Nous savons que  $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ , donc  $-e^x \leq e^x \cos(x) \leq e^x$ .

Or  $\lim_{x \rightarrow -\infty} -e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ , donc **d'après le théorème des gendarmes**,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ .

1) Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2 - \sin(x)$ . Calculer la limites de  $f$  en  $+\infty$ .

$\sin(x)$  n'a pas de limite en  $+\infty$ . On ne peut donc pas calculer la limite de  $f$  directement avec les opérations.

Nous savons que  $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ , donc  $x^2-1 \leq x^2-\sin(x) \leq x^2+1$ . En particulier,  $x^2-1 \leq x^2-\sin(x)$

Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2-1 = +\infty$ , donc **d'après le théorème de comparaison**,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

### Lever une indétermination en utilisant les croissances comparées :

1) Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{e^x+x}{e^x-x^2}$ . Calculer la limites de  $f$  en  $+\infty$ .

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 = -\infty \end{array} \right\} \text{Par somme, nous avons une forme indéterminée au dénominateur}$$

$$f(x) = \frac{e^x+x}{e^x-x^2} = \frac{e^x(1+\frac{x}{e^x})}{e^x(1-\frac{x^2}{e^x})} = \frac{1+\frac{x}{e^x}}{1-\frac{x^2}{e^x}}$$

**NE PAS OUBLIER DE SIMPLIFIER !!**

**D'après le cours, nous savons que**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$  **donc que**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} = 0$ .

De même,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x^2}} = 0$ . Ainsi :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{x}{e^x}) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \frac{x^2}{e^x}) = 1 \end{array} \right\} \text{Par quotient, nous obtenons finalement :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

2) Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x e^{4x}$ . Calculer la limites de  $f$  en  $-\infty$ .

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{4x} = 0 \end{array} \right\} \text{Par produit, nous avons une forme indéterminée}$$

$f(x) = x e^{4x} = \frac{1}{4} \times 4x e^{4x}$ . En posant  $X = 4x$ , nous avons  $f(x) = \frac{1}{4} \times X e^X$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} X = -\infty$ .

**Or, d'après le cours, nous savons que**  $\lim_{X \rightarrow -\infty} X e^X = 0$ .

Nous pouvons en déduire que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ .

3) Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = 2x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$ . Calculer la limites de  $f$  en  $+\infty$ .

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} - 1 = 0 \end{array} \right\} \text{Par produit, nous avons une forme indéterminée}$$

$f(x) = 2x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = 2 \times \frac{(e^{\frac{1}{x}} - 1)}{\frac{1}{x}}$ . En posant  $X = \frac{1}{x}$ , nous avons  $f(x) = 2 \times \frac{e^X - 1}{X}$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} X = 0$ .

**Or, d'après le cours, nous savons que**  $\lim_{X \rightarrow 0} \frac{e^X - 1}{X} = 1$ .

Nous pouvons en déduire que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ .

### Autres méthodes, astuces, notions... rencontrées :

# Le cours – T° spé : Logarithme népérien

Prérequis : [fonction exponentielle](#), [compléments fonctions](#), [limites de fonctions](#)

## Premières propriétés :

Pour tout réel  $a$  **strictement positif**,  $e^x = a \Leftrightarrow x = \ln a$   
 Pour tout réel  $a$ ,  $\ln(x) = a \Leftrightarrow x = e^a$   
 Pour tout réel  $x$  **strictement positif**,  $e^{\ln x} = x$   
 Pour tout réel  $x$ ,  $\ln(e^x) = x$   
 $\ln 1 = 0$        $\ln e = 1$        $\ln \frac{1}{e} = -1$

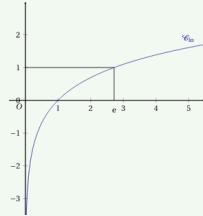
$e^x = 5 \Leftrightarrow x = \ln 5$   
 $\ln(x) = -3 \Leftrightarrow x = e^{-3}$   
 $x = e^{\ln x}$   
 $8 = e^{\ln 8}$

## Fonction logarithme :

La fonction logarithme népérien est **continue et dérivable** sur  $]0; +\infty[$ .

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$x$	0	1	$e$	$+\infty$
$f'(x) = \frac{1}{x}$			+	
$f(x) = \ln x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$



## Résolution d'équations, inéquations :

$$\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$$

$$\ln a \geq \ln b \Leftrightarrow a \geq b$$

$$\ln(x+3) = \ln(2) \Leftrightarrow x+3=2$$

$$\ln(2x+1) > \ln(2) \Leftrightarrow 2x+1 > 2$$

## Tableau de signe :

$x$	0	1	$+\infty$	
Signe de $\ln(x)$		-	0	+

## Dérivée d'une composée :

Soit  $u$  une fonction dérivable et **strictement positive** sur un intervalle  $I$ .

$$(\ln u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

## Relation fonctionnelle et propriétés algébriques :

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$$

$$\ln(a^p) = p \ln a$$

$$\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$$

$$\ln(x) + \ln(x+1) = \ln(x(x+1))$$

$$\ln(x+3) - \ln(2) = \ln\left(\frac{x+3}{2}\right)$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$$

$$\ln(0,6^n) = n \ln(0,6)$$

$$\ln(\sqrt{3}) = \frac{1}{2} \ln(3)$$

## Limites et croissances comparées :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

# Les méthodes – T° spé : Logarithme népérien

## Résolutions d'équations, inéquations :

**Résoudre**  $\ln(2x+3) = \ln(x)$

$$\ln(2x+3) \text{ existe si } 2x+3 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{3}{2}$$

$$\ln(x) \text{ existe si } x > 0$$

Le domaine de validité est  $D = ]0; +\infty[$ .

Sur ce domaine :

$$\ln(2x+3) = \ln(x)$$

$$\Leftrightarrow 2x+3 = x$$

$$\Leftrightarrow x = -3$$

$-3 \notin D$ , donc l'équation n'a pas de solution.

**Résoudre**  $2\ln(x) + 1 = 7$

Le domaine de validité est  $D = ]0; +\infty[$ .

Sur ce domaine :

$$2\ln(x) + 1 = 7$$

$$\Leftrightarrow 2\ln(x) = 6$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) = 3$$

$$\Leftrightarrow x = e^3$$

$e^3 \in D$ , donc la solution est :

$$S = \{e^3\}$$

**Résoudre**  $e^{x-3} > 5$

$$e^{x-3} > 5$$

$$\Leftrightarrow x-3 > \ln(5)$$

$$\Leftrightarrow x > \ln(5) + 3$$

La solution est donc :

$$S = ]\ln(5) + 3; +\infty[$$

**Résoudre**  $\ln(x+3) + \ln(2-x) \geq \ln(6)$

$$\ln(x+3) \text{ existe si } x+3 > 0 \Leftrightarrow x > -3$$

Le domaine de validité est  $D = ]-3; 2[$ .

Sur ce domaine :

$$\ln(x+3) + \ln(2-x) \geq \ln(6)$$

$$\Leftrightarrow \ln((x+3)(2-x)) \geq \ln(6)$$

$$\Leftrightarrow (x+3)(2-x) \geq 6$$

$$\Leftrightarrow -x^2 - x + 6 \geq 6$$

$$\Leftrightarrow -x^2 - x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+1) \leq 0$$

$x$	-3	-1	0	2	
$x$	-	:	-	0	+
$x+1$	-	0	+	:	+
$x(x+1)$	+	0	-	0	+

Avec le tableau de signe, on trouve finalement  $S = [-1; 0]$

**Résoudre**  $0,9^n \leq 0,1$ ,  $n \in \mathbb{N}$

$$0,9^n \leq 0,1$$

$$\Leftrightarrow \ln(0,9^n) \leq \ln(0,1)$$

$$\Leftrightarrow n \times \ln(0,9) \leq \ln(0,1)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,1)}{\ln(0,9)} \quad \text{car } \ln(0,9) < 0$$

Or  $\frac{\ln(0,1)}{\ln(0,9)} \approx 21,85$ . Comme  $n \in \mathbb{N}$ , la solution est

finalement  $n \geq 22$ .

**Résoudre**  $x^{2,7} = 64$ ,  $n \in \mathbb{N}$

$$x^{2,7} = 64$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^{2,7}) = \ln(64)$$

$$\Leftrightarrow 2,7 \times \ln(x) = \ln(64)$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) = \frac{\ln(64)}{2,7}$$

$$\Leftrightarrow x = e^{\frac{\ln(64)}{2,7}}$$

La solution est donc  $S = \left\{ e^{\frac{\ln(64)}{2,7}} \right\}$

**Simplifications :**

Simplifier le nombre  $A = \ln(e^3) - \ln\left(\frac{1}{e^2}\right) + 2 \ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$

$$A = \ln(e^3) - \ln\left(\frac{1}{e^2}\right) + 2 \ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$$

$$A = 3 + \ln(e^2) - 2 \ln(\sqrt{e})$$

$$A = 3 + 2 - 2 \times \frac{1}{2} \ln(e)$$

$$A = 3 + 2 - 1 = 4$$

**Études de fonctions :**

1) Faire l'étude complète de la fonction  $f(x) = x^2 - \ln(x)$  définie sur  $]0; +\infty[$ .

**Limite en 0 :**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} -\ln(x) = +\infty \end{array} \right\} \text{Par somme, nous obtenons :} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

**Limite en  $+\infty$  :**

Par somme, nous avons une **forme indéterminée**. En factorisant par  $x^2$  nous obtenons :

$$f(x) = x^2 \left( 1 - \frac{\ln(x)}{x^2} \right)$$

Or,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$  d'après le cours. Ainsi  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{\ln x}{x^2} \right) = 1$ . De plus,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ . Donc, par produit,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

**Variations :**

$f'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x}$ . Sur  $]0; +\infty[$ ,  $f'$  est donc du signe de  $2x^2 - 1$  (signe simple d'un polynôme du 2<sup>nd</sup> degré) :

$x$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	0 +
$f(x)$		$+\infty$	$+\infty$

$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

2) Soit  $g$  la fonction définie par  $g(x) = \ln\left(\frac{x+3}{-x+4}\right)$ .

a) Déterminer l'ensemble de définition de  $g$ .

b) Calculer  $g'(x)$

a)  $g$  est définie si  $\frac{x+3}{-x+4} > 0$ . Nous étudions donc le signe de  $\frac{x+3}{-x+4}$  :

$x$	$-\infty$	-3	4	$+\infty$
$x+3$	-	0	+	+
$-x+4$	+	+	0	-
$\frac{x+3}{-x+4}$	-	0	+	-

L'ensemble de définition de  $g$  est donc  $D_g = ]-3; 4[$

b)  $g$  est de la forme  $\ln(u(x))$  avec  $u(x) = \frac{x+3}{-x+4}$ . Nous avons donc

$$u'(x) = \frac{-x+4 - (-1)(x+3)}{(-x+4)^2} = \frac{-x+4+x+3}{(-x+4)^2} = \frac{7}{(-x+4)^2}$$

$$\text{Ainsi, } g'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{\frac{7}{(-x+4)^2}}{\frac{x+3}{-x+4}} = \frac{7}{(-x+4)^2} \times \frac{-x+4}{x+3} = \frac{7}{(-x+4)(x+3)}$$

**Autres méthodes, astuces, notions... rencontrées :**

## Le cours – T° spé : Primitives

### Équation différentielle et primitive :

Une **équation différentielle du 1<sup>er</sup> ordre** est une équation dans laquelle interviennent une fonction dérivable  $y$ , sa dérivée  $y'$  et la variable  $x$ . **L'inconnue de cette équation est la fonction  $y$ .**

Exemples d'équations différentielles :

$$y' = x^3 + 1 \qquad xy' + 2y = e^x \qquad 2y' - y = 1$$

Toute fonction solution sur un intervalle  $I$  de l'équation différentielle  $y' = f$  s'appelle une **primitive** de  $f$  sur  $I$ .

Une fonction  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$  si, pour tout réel  $x$  de  $I$  :

$$F'(x) = f(x)$$

**La recherche d'une primitive est l'opération inverse de la dérivation.**

**Toute fonction continue sur  $I$  admet des primitives sur  $I$ .**

Si  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ , alors, pour tout réel  $k$ , la fonction  $G(x) = F(x) + k$  est aussi une primitive de  $f$  sur  $I$ .  
Une fonction continue sur  $I$  admet donc **une infinité de primitives** sur  $I$ .

### Tableaux des primitives :

Fonction $f$	Une primitive $F$	Intervalle de validité
$f(x) = a$	$F(x) = ax$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ pour $n$ entier différent de $-1$ et $0$	$F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$	• $\mathbb{R}$ lorsque $n > 0$ • $]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$ lorsque $n < 0$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x}$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x)$	$]0; +\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x)$	$\mathbb{R}$

Forme de la fonction	Primitive à une constante près	Conditions
$u' + v'$	$u + v$	$u$ et $v$ dérivables sur $I$
$\lambda u'$ , avec $\lambda$ réel	$\lambda u$	
$u^n$ , $n \in \mathbb{Z}$ , $n \neq 0$ et $n \neq -1$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	Si $n$ est négatif, alors $u(x) \neq 0$ pour tout $x$ de $I$ .
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$	$u(x) \neq 0$ pour tout $x$ de $I$
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}$	$u(x) > 0$ pour tout $x$ de $I$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u $	pour $u(x) \neq 0$
$u'e^u$	$e^u$	
$(v' \circ u) \times u'$	$v \circ u$	$v$ dérivable sur un intervalle $J$ et, pour tout $x$ de $I$ , $u(x)$ appartient à $J$

## Les méthodes – T° spé : Primitives

### Vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle :

Soit l'équation différentielle  $y' - 2y = 4$  pour  $x$  réel.

Montrer que la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^{2x} - 2$  est une solution de cette équation.

**Solution :**

Calculons en premier lieu  $f'$  :  $f'(x) = 2e^{2x}$ .

Nous avons donc :  $f'(x) - 2f(x) = 2e^{2x} - 2(e^{2x} - 2) = 2e^{2x} - 2e^{2x} + 4 = 4$ .

$f$  est donc bien une solution de l'équation différentielle  $y' - 2y = 4$ .

### Vérifier qu'une fonction est une primitive d'une autre fonction :

Soit les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = xe^x$  et  $g(x) = (x-1)e^x$ .

a) Montrer que  $g$  est une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

b) En déduire toutes les primitives de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Solution :**

a)  $g$  est une primitive de  $f$  si  $g'(x) = f(x)$ . Nous calculons donc la dérivée de  $g$  :

$g$  est de la forme  $g(x) = u(x) \times v(x)$  avec  $u(x) = (x-1)$  et  $v(x) = e^x$ .

Donc  $g'(x) = 1e^x + (x-1)e^x = e^x + xe^x - e^x = xe^x = f(x)$ .

$g$  est bien une primitive de  $f$ .

b) On en déduit l'ensemble des primitives de  $f$  :  $F(x) = g(x) + k = (x-1)e^x + k$

### Calculs de primitives :

Calculer une primitive des fonctions suivantes :

a)  $f(x) = x^2 - 4x + 9$       b)  $g(x) = \frac{1}{x} - \frac{4}{x^3}$       c)  $h(x) = 6x(x^2 - 1)^3$

d)  $i(x) = \frac{5}{2x+3}$       e)  $k(x) = 3e^{2x+1}$

**Solution :**

a)  $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 9x$

b)  $g(x) = \frac{1}{x} - \frac{4}{x^3} = \frac{1}{x} - 4x^{-3}$ , donc  $G(x) = \ln(x) - 4 \times \frac{x^{-2}}{-2} = \ln(x) + 2x^{-2} = \ln(x) + \frac{2}{x^2}$

c)  $h(x) = 6x(x^2 - 1)^3 = 3 \times 2x(x^2 - 1)^3$ , donc  $h$  est de la forme  $h(x) = 3u'u^3$ . Nous avons ainsi :

$$H(x) = 3 \times \frac{(x^2 - 1)^4}{4} = \frac{3}{4}(x^2 - 1)^4$$

d)  $i(x) = \frac{5}{2} \times \frac{2}{2x+3}$ , donc  $i$  est de la forme  $i(x) = \frac{5}{2} \times \frac{u'}{u}$ . Nous avons ainsi :

$$I(x) = \frac{5}{2} \ln(|2x+3|)$$

e)  $k(x) = 3e^{2x+1} = \frac{3}{2} \times 2e^{2x+1}$ , donc  $k$  est de la forme  $k(x) = \frac{3}{2} \times u'e^u$ . Nous avons ainsi :

$$K(x) = \frac{3}{2} e^{2x+1}$$

**Détermination de la constante :**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$ . Déterminer la primitive  $F$  de  $f$  telle que  $F(0) = 5$ .

**Solution :**

$f$  est de la forme  $f(x) = \frac{u'}{u}$ . L'ensemble des primitives de  $f$  sont donc :  $F_k(x) = \ln(e^x+1) + k$  ( $e^x+1 > 0$ ). Nous cherchons la primitive qui est telle que  $F_k(0) = 5 \Leftrightarrow \ln(e^0+1) + k = 5 \Leftrightarrow \ln(2) + k = 5 \Leftrightarrow k = 5 - \ln(2)$ . La primitive recherchée est donc :

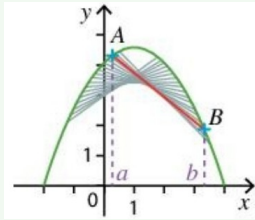
$$F(x) = \ln(e^x+1) + 5 - \ln(2)$$

**Autres méthodes, astuces, notions... rencontrées :**

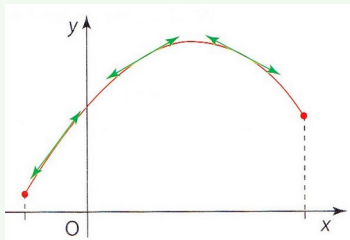
**Fonction concave**

**Définition :**

La fonction  $f$  est dite **concave** sur l'intervalle  $I$  si, pour tous réels  $a$  et  $b$  de  $I$ , la portion de la courbe située entre les points  $A(a; f(a))$   $B(b; f(b))$  est **au-dessus de la sécante (AB)**.



La fonction  $f$  est dite **concave** sur l'intervalle  $I$  si sa courbe représentative est entièrement située **en-dessous de chacune de ses tangentes**.



**Lien avec la fonction dérivée  $f'$  :**

La fonction  $f$  est **concave** sur  $I$  si, et seulement si, sa fonction dérivée  **$f'$  est décroissante** sur  $I$ .

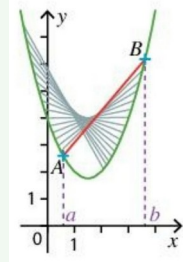
**Lien avec la fonction dérivée seconde  $f''$  :**

La fonction  $f$  est **concave** sur  $I$  si, et seulement si, pour tout réel  $x \in I$ ,  **$f''(x) \leq 0$** .

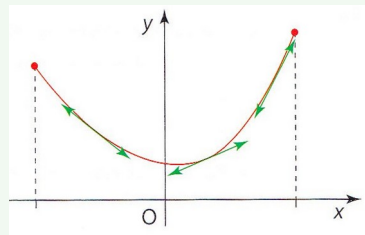
**Fonction convexe**

**Définition :**

La fonction  $f$  est dite **convexe** sur l'intervalle  $I$  si, pour tous réels  $a$  et  $b$  de  $I$ , la portion de la courbe située entre les points  $A(a; f(a))$   $B(b; f(b))$  est **en-dessous de la sécante (AB)**.



La fonction  $f$  est dite **convexe** sur l'intervalle  $I$  si sa courbe représentative est entièrement située **au-dessus de chacune de ses tangentes**.



**Lien avec la fonction dérivée  $f'$  :**

La fonction  $f$  est **convexe** sur  $I$  si, et seulement si, sa fonction dérivée  **$f'$  est croissante** sur  $I$ .

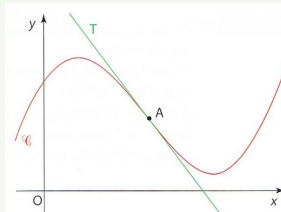
**Lien avec la fonction dérivée seconde  $f''$  :**

La fonction  $f$  est **convexe** sur  $I$  si, et seulement si, pour tout réel  $x \in I$ ,  **$f''(x) \geq 0$** .

**Point d'inflexion :**

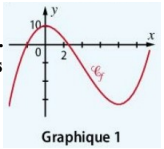
Un **point d'inflexion** d'une courbe est un point en lequel la courbe traverse la tangente.

Le point A d'abscisse  $a$  est un **point d'inflexion** de la courbe  $C_f$  si, et seulement si, la dérivée seconde  **$f''$  s'annule en  $a$  en changeant de signe**.



**Lecture graphique :**

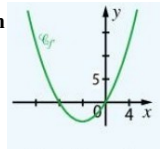
1) On donne sur le graphique 1 la courbe représentative d'une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$ . Déterminer les intervalles sur lesquels la fonction  $f$  est convexe et les intervalles sur lesquels elle est concave.



**Solution :**

Par lecture graphique,  $f$  est concave sur  $]-\infty; 4]$  et convexe sur  $[4; +\infty[$ .

2) On donne sur le graphique 2 la courbe représentative de la fonction dérivée d'une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$ . Déterminer les intervalles sur lesquels la fonction  $f$  est convexe et concave.



**Solution :**

$f$  est concave lorsque sa dérivée est décroissante soit sur l'intervalle  $]-\infty; -4]$ .  
 $f$  est convexe lorsque sa dérivée est croissante, soit sur l'intervalle  $[-4; +\infty[$ .

**Étude de convexité :**

1) On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^x$  et on note  $C_f$  sa courbe représentative.

- a) Étudier la convexité de  $f$ .
- b) Déterminer une équation de la tangente  $T$  à  $C_f$  en son point d'abscisse 0.
- c) En déduire que quel que soit le réel  $x$  :  $e^x \geq x+1$

**Solution :**

- a)  $f''(x) = f'(x) = e^x > 0$ , donc  $f$  est convexe sur  $\mathbb{R}$ .
- b)  $T: y = f'(0)(x-0) + f(0) \Leftrightarrow y = x+1$
- c) La fonction  $f$  est convexe sur  $\mathbb{R}$ . Sa courbe représentative est donc au-dessus de toutes ses tangentes sur  $\mathbb{R}$ . Elle est, en particulier, au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 0, d'où  $e^x \geq x+1$

2) On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = \sqrt{1+x}$  et on note  $C_f$  sa courbe représentative.

- a) Étudier la convexité de  $f$ .
- b) Déterminer une équation de la tangente  $T$  à  $C_f$  en son point d'abscisse 0.
- c) En déduire que quel que soit le réel  $x$  de  $[0; +\infty[$  :  $\sqrt{1+x} \leq 1+0,5x$

**Solution :**

- a)  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$ , et  $f''(x) = -\frac{1}{4(1+x)\sqrt{1+x}}$   
 Sur  $[0; +\infty[$ ,  $\sqrt{1+x} \geq 0$ ,  $1+x \geq 0$ , donc  $f''(x) \leq 0$  et  $f$  est concave.

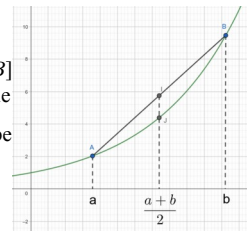
- b)  $T: y = f'(0)(x-0) + f(0) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x+1$

- c) La fonction  $f$  est concave sur  $[0; +\infty[$ . Sa courbe représentative est donc en-dessous de toutes ses tangentes sur  $[0; +\infty[$ . Elle est, en particulier, en-dessous de sa tangente au point d'abscisse 0, d'où  $\sqrt{1+x} \leq 1+0,5x$

3) En utilisant la convexité de la fonction exponentielle, démontrer que pour tout réels  $a$  et  $b$  :  $e^{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{e^a + e^b}{2}$

**Solution :**

Soit les points  $A(a; e^a)$   $B(b; e^b)$ . La fonction exponentielle étant convexe, le segment  $[AB]$  est situé au-dessus de la courbe représentative de la fonction exponentielle. En particulier, le milieu de ce segment de coordonnées  $(\frac{a+b}{2}, \frac{e^a + e^b}{2})$  est au-dessus du point de la courbe ayant la même abscisse  $(\frac{a+b}{2}; e^{\frac{a+b}{2}})$ . On a donc  $e^{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{e^a + e^b}{2}$ .



# Le cours – 1<sup>ère</sup> spé : Produit scalaire

Prérequis : Vecteurs sans coordonnées, coordonnées de vecteurs

## Définition et propriétés :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\widehat{u;v}) \quad \vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AB} = AB^2 = \|\vec{AB}\|^2 = AB^2$$

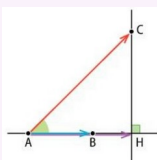
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \quad \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \quad (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v}), k \in \mathbb{R}$$

Si  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  sont **colinéaires et de même sens**, on a  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC$

Si  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  sont **colinéaires et de sens contraires**, on a  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -AB \times AC$

## Projection orthogonale :

Soit  $H$  le **projeté orthogonal** de  $C$  sur la droite  $(AB)$ . Alors  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH}$



## Caractérisation de l'orthogonalité :

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$  équivaut à  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux (s'ils sont non nuls)

Si  $\vec{u} = \vec{AB}$  et  $\vec{v} = \vec{AC}$ , on dit que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux lorsque les droites  $(AB)$  et  $(AC)$  sont **perpendiculaires**.

## Expression dans un repère orthonormé :

Si  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  dans un repère orthonormé, alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = x x' + y y'$

En particulier  $\|\vec{u}\| = \sqrt{(\vec{u} \cdot \vec{u})} = \sqrt{x^2 + y^2}$  et  $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

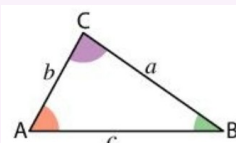
$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux si, et seulement si,  $x x' + y y' = 0$

## Application du produit scalaire :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} \quad \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

L'application de la deuxième formule dans un triangle  $ABC$  donne la formule d'Al-Kashi :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\hat{A}) \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\hat{B}) \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2abc \cos(\hat{C})$$

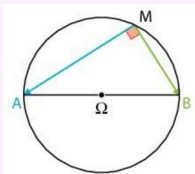


## Théorème de la médiane, caractérisation du cercle :

Théorème de la médiane :  $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = M\Omega^2 - \frac{AB^2}{4}$

Caractérisation du cercle : Le cercle de diamètre  $[AB]$  est l'ensemble des points  $M$  tels que  $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$

**Si, dans un cercle, un triangle a pour sommets les extrémités d'un diamètre et un point de ce cercle alors ce triangle est rectangle.**

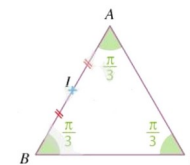


# Les méthodes – 1<sup>ère</sup> spé : Produit scalaire

## Calculer des produits scalaires

$ABC$  est un triangle équilatéral de côté 2.  $I$  est le milieu du segment  $[AB]$ . Calculer les produits scalaires suivants :

- $\vec{BC} \cdot \vec{BA}$
- $\vec{AI} \cdot \vec{AC}$
- $\vec{BC} \cdot \vec{CA}$



### Solutions :

1)  $BC = BA = 2$ , et comme  $ABC$  est équilatéral,  $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{3}$ , donc

$$\vec{BC} \cdot \vec{BA} = BC \times BA \times \cos(\widehat{ABC}) = 2 \times 2 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \times 2 \times \frac{1}{2} = 2.$$

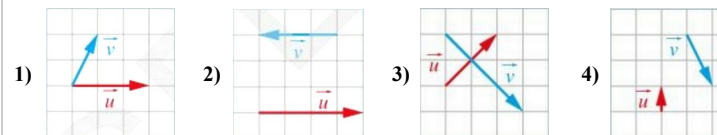
2)  $AC = 2$ ,  $AI = 1$  et  $\widehat{ACI} = \frac{\pi}{3}$ , donc

$$\vec{AI} \cdot \vec{AC} = AI \times AC \times \cos(\widehat{ACI}) = 1 \times 2 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 \times 2 \times \frac{1}{2} = 1.$$

3)  $\vec{BC} \cdot \vec{CA} = -\vec{CB} \cdot \vec{CA} = -CB \times CA \times \cos(\widehat{ACB}) = -2 \times 2 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2 \times 2 \times \frac{1}{2} = -2$

## Choisir une expression adaptée pour calculer un produit scalaire

Dans chacun des cas suivants, calculer le produit scalaire  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ , l'unité de longueur étant le carreau.



### Solutions :

1) Nous pouvons définir 3 points  $A, B$  et  $C$  tels que  $\vec{AB} = \vec{u}$  et  $\vec{AC} = \vec{v}$ . On appelle  $H$  le projeté orthogonal de  $C$  sur  $(AB)$ . On a alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{AB} \cdot \vec{AH} = 3 \times 1 = 3$ .

2) Les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires de sens contraire, donc  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| = -4 \times 3 = -12$

3) Les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux, donc  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .

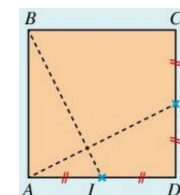
4) En projetant orthogonalement le vecteur  $\vec{v}$  sur la droite de direction du vecteur  $\vec{u}$ , on obtient :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1 \times 2 = -2$ .

## Calculer un produit scalaire en décomposant des vecteurs

$ABCD$  est un carré de côté  $a$ ,  $I$  le milieu de  $[AD]$  et  $J$  est le milieu de  $[CD]$ .

1) En remarquant que  $\vec{AJ} = \vec{AD} + \vec{DJ}$  et que  $\vec{BI} = \vec{BA} + \vec{AI}$ , calculer  $\vec{AJ} \cdot \vec{BI}$ .

2) Que peut-on en conclure ?



**Solutions :**

1)

$$\begin{aligned} \vec{AJ} \cdot \vec{BI} &= (\vec{AD} + \vec{DJ}) \cdot (\vec{BA} + \vec{AI}) \\ &= \vec{AD} \cdot \vec{BA} + \vec{AD} \cdot \vec{AI} + \vec{DJ} \cdot \vec{BA} + \vec{DJ} \cdot \vec{AI} \\ &= 0 + \vec{AD} \cdot \vec{AI} + \vec{DJ} \cdot \vec{BA} + 0 \\ &= AD \times AI - DJ \times BA \\ &= a \times \frac{a}{2} - \frac{a}{2} \times a = 0 \end{aligned}$$

2) On en déduit que les vecteurs  $\vec{AJ}$  et  $\vec{BI}$  sont orthogonaux et que les droites  $(AJ)$  et  $(BI)$  sont perpendiculaires.**Calculer un produit scalaire avec des coordonnées**

Dans un repère orthonormé, on considère les vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ , ainsi que les points  $A(2; 3)$ ,  $B(-5; 4)$ ,  $C(-1; -3)$  et  $D(-1; 1)$ . Calculer les produits scalaires  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  et  $\vec{AB} \cdot \vec{CD}$ .

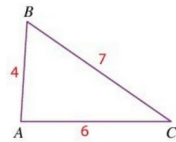
**Solutions :**

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times (-3) + (-1) \times 5 = -6 - 5 = -11.$$

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} -5-2 \\ 4-3 \end{pmatrix} \text{ donc } \vec{AB} \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{CD} \begin{pmatrix} -1-(-1) \\ 1-(-3) \end{pmatrix} \text{ donc } \vec{CD} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}. \text{ On a alors } \vec{AB} \cdot \vec{CD} = -7 \times 0 + (1) \times 4 = 4.$$

**Calculer un produit scalaire dans un triangle**

Soit  $ABC$  un triangle tel que  $AB = 4$ ,  $AC = 6$  et  $BC = 7$ . Calculer  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ .

**Solutions :**

$$\begin{aligned} \vec{AB} \cdot \vec{AC} &= \frac{1}{2} (\|\vec{AB}\|^2 + \|\vec{AC}\|^2 - \|\vec{AB} - \vec{AC}\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (\|\vec{AB}\|^2 + \|\vec{AC}\|^2 - \|\vec{AB} + \vec{CA}\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (\|\vec{AB}\|^2 + \|\vec{AC}\|^2 - \|\vec{CB}\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (AB^2 + AC^2 - CB^2) = \frac{1}{2} (4^2 + 6^2 - 7^2) = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

**Déterminer une ligne de niveau**

$A$  et  $B$  sont deux points distincts tels que  $AB = 4 \text{ cm}$ . Montrer que l'ensemble des points  $M$  tels que  $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 40$  est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

**Solutions :**

Soit  $I$  le milieu de  $[AB]$ . D'après le théorème de la médiane, on a :

$$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 40 \Leftrightarrow MI^2 - \frac{AB^2}{4} = 40 \Leftrightarrow MI^2 = 40 + \frac{6^2}{4} \Leftrightarrow MI = 7. \text{ L'ensemble des points } M \text{ est donc le cercle de centre } I \text{ et de rayon } 7.$$

**Calculer des longueurs et des angles dans un triangle**

$ABC$  est un triangle tel que  $AB = 6$ ,  $AC = 12$  et  $\widehat{BAC} = 60^\circ$ .

1) Calculer  $BC$  et en déduire une mesure en degré de l'angle  $\widehat{BCA}$ .2) Que peut-on en déduire pour le triangle  $ABC$  ?**Solutions :**

1) D'après la formule d'Al-Kashi, on a

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) \\ &= 6^2 + 12^2 - 2 \times 6 \times 12 \times \cos(60^\circ) = 108 \end{aligned}$$

$$\text{On a donc } BC = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$$

On utilise de nouveau la formule d'Al-Kashi :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \times AC \times BC \times \cos(\widehat{BCA})$$

$$\text{donc } 6^2 = 12^2 + 108 - 2 \times 12 \times 6\sqrt{3} \times \cos(\widehat{BCA}) \text{ et donc } \cos(\widehat{BCA}) = \frac{-216}{-144\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Donc } \widehat{BCA} = 30^\circ.$$

2) La somme des mesures des angles d'un triangle étant égale à  $180^\circ$ , on en déduit :  $\widehat{ABC} = 180^\circ - 60^\circ - 30^\circ = 90^\circ$ . On peut en conclure que le triangle  $ABC$  est rectangle en  $B$ .

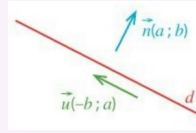
**Autres méthodes, astuces, notions... rencontrées :**

# Le cours – 1<sup>ère</sup> spé : Droites et cercles

Prérequis : Vecteurs sans coordonnées, coordonnées de vecteurs, droites et systèmes, produit scalaire

## Vecteur directeur d'une droite et critère de colinéarité :

Un **vecteur directeur** d'une droite d'équation cartésienne  $ax + by + c = 0$  est  $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ .



$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  sont **colinéaires** si et seulement si  $\det(\vec{u}, \vec{v}) = x y' - y x' = 0$ .

## Vecteur normal à une droite

Un **vecteur normal** à une droite  $d$  est un vecteur non nul **orthogonal à un vecteur directeur de  $d$** , donc à tout vecteur directeur de  $d$ .

Soit  $d$  une droite de vecteur normal  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ,  $A$  un point de  $d$  et  $M$  un point du plan.  $M$  appartient à  $d$  si, et seulement si,  $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$ .

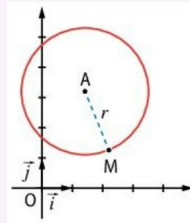
Si  $d$  est une droite d'équation cartésienne  $ax + by + c = 0$ , un vecteur normal à  $d$  est  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  (et réciproquement)

## Équation d'un cercle

Cercle de centre  $A(x_A; y_A)$  et de rayon  $r$  :  $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2$

Tout cercle a une équation de la forme  $x^2 + ax + y^2 + by + c = 0$

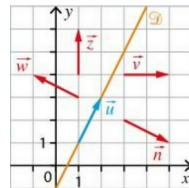
(parabole :  $y = ax^2 + bx + c$ )



# Les méthodes – 1<sup>ère</sup> spé : Droites et cercles

## Identifier des vecteurs normaux à une droite

On considère la droite  $\mathcal{D}$  dont le vecteur  $\vec{u}$  est un vecteur directeur. Quels sont, parmi les vecteurs  $\vec{n}$ ,  $\vec{w}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{z}$  représentés sur la figure ci-contre, les deux vecteurs normaux à  $\mathcal{D}$  ?



### Solutions :

D'après la figure, on conjecture que les deux vecteurs normaux à  $\mathcal{D}$  sont  $\vec{n}$  et  $\vec{w}$ .

Les vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{n}$  et  $\vec{w}$  ont pour coordonnées  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{w} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

$\vec{n} \cdot \vec{u} = 2 \times 1 + (-1) \times 2 = 0$ . Les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{n}$  sont donc bien orthogonaux.

$\vec{w} \cdot \vec{u} = -2 \times 1 + 1 \times 2 = 0$ . Les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{w}$  sont donc bien orthogonaux.

## Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à une droite donnée

1) Soit  $\mathcal{D}_1$  la droite passant par le point  $A(2; 5)$  et de vecteur directeur  $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ . Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à la droite  $\mathcal{D}_1$ .

2) Soit  $\mathcal{D}_2$  la droite dont une équation cartésienne est  $-x - 4y + 1 = 0$ . Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à la droite  $\mathcal{D}_2$ .

### Solutions :

1) Le vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$  est un vecteur directeur de  $\mathcal{D}_1$  donc  $\mathcal{D}_1$  admet une équation cartésienne de la forme  $3x + y + c = 0$  avec  $c \in \mathbb{R}$ . On en déduit que le vecteur  $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  est un vecteur normal à  $\mathcal{D}_1$ .

2) Avec l'équation cartésienne, on déduit directement un vecteur normal à  $\mathcal{D}_2$  :  $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$

## Déterminer une équation cartésienne de droite

Soit  $\Delta$  une droite passant par le point  $A(2; 1)$  et de vecteur normal  $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Déterminer une équation cartésienne de  $\Delta$ .

### Solutions :

$$\begin{aligned} M(x; y) \text{ appartient à } \mathcal{D} &\Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{AM} = 0 \Leftrightarrow -1 \times (x-2) + 2 \times (y-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow -x + 2 + 2y - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow -x + 2y = 0 \end{aligned}$$

On en déduit qu'une équation cartésienne de  $\Delta$  est  $-x + 2y = 0$ .

## Déterminer une équation de cercle

Soient les points  $A(1; 1)$  et  $B(5; -2)$ .

Déterminer une équation du cercle  $\mathcal{C}$  de diamètre  $[AB]$ . Déterminer les coordonnées de son centre et la valeur de son rayon.

### Solutions :

#### Méthode n°1 :

Le centre de  $\mathcal{C}$  est le milieu  $I$  de  $[AB]$ . Ses coordonnées sont donc :  $I \left( \frac{1+5}{2}; \frac{1-2}{2} \right)$  soit  $I \left( 3; -\frac{1}{2} \right)$ . Le rayon est la

longueur  $AI$ . On a donc  $r^2 = AI^2 = (3-1)^2 + \left(-\frac{1}{2}-1\right)^2 = \frac{25}{4}$ .

Donc  $\mathcal{C}$  admet pour équation  $(x-3)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$

#### Méthode n°2 :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C} &\Leftrightarrow \vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0 \\ &\Leftrightarrow (1-x)(5-x) + (1-y)(-2-y) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 6x + y^2 + y = -3 \\ &\Leftrightarrow (x-3)^2 - 9 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = -3 \\ &\Leftrightarrow (x-3)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} \end{aligned}$$

## Le cours – T° spé : Vecteurs dans l'espace

Prérequis : [Produit scalaire, droites et cercles](#)

### Vecteurs et colinéarité :

- Un **vecteur** de l'espace est défini par une **direction** de l'espace, un **sens** et une **norme** (longueur).
- $ABDC$  est un **parallélogramme**  $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ .
- Deux vecteurs non nuls sont **colinéaires** si, et seulement si, ils ont **même direction**. Autrement dit, les vecteurs non nuls  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires si, et seulement si, il existe un réel  $k$  tel que  $\vec{u} = k\vec{v}$ .
- Les point  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont **alignés** si, et seulement si,  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont colinéaires ( $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ ).

### Droite :

- 2 points **distincts** de l'espace définissent une **droite**.
- On appelle **vecteur directeur** d'une droite  $d$  tout vecteur non nul dont la direction est la même que celle de  $d$ .
- Un **point A** et un **vecteur  $\vec{u}$**  déterminent la droite passant par  $A$  et de vecteur directeur  $\vec{u}$ .

### Plan, repère du plan :

- 3 points  $A$ ,  $B$  et  $C$  définissent un plan **s'ils ne sont pas alignés**. Dans ces conditions, le triplet  $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$  est un **repère du plan**. Les vecteurs de l'espace  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont **non colinéaires**.
- 2 **vecteurs**, comme 3 **points** sont **toujours coplanaires**.
- Trois vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont **coplanaires** si, et seulement si, il existe trois réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  non tous nuls tels que :  
$$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$$
- Trois vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont **coplanaires** si, et seulement si, on peut exprimer l'un en fonction des deux autres :  
$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$$

### Repère de l'espace :

- 3 vecteurs (ou 4 points) sont **non coplanaires** s'il **n'existe pas** de nombres  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ .
- On appelle **base de l'espace** tout triplet  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  de vecteurs **non coplanaires**.
- On appelle **repère de l'espace** le quadruplet  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .  $O$  est appelé **l'origine du repère**.

La décomposition  $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  donne les **coordonnées**  $(x; y; z)$  du point  $M$ .

La décomposition  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  donne les **coordonnées**  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  du vecteur  $\vec{u}$ .

Le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$

Le milieu  $I$  de  $[AB]$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} \frac{x_A + x_B}{2} \\ \frac{y_A + y_B}{2} \\ \frac{z_A + z_B}{2} \end{pmatrix}$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

### Positions relatives :

- Deux droites de l'espace sont soit **coplanaires** (dans un même plan) soit **non coplanaires** :  
2 droites **parallèles** sont **coplanaires**  
2 droites **sécantes** sont **coplanaires**  
sinon les droites sont **non coplanaires**
- Deux plans de l'espace sont soit **sécants** soit **parallèles**.
- Une droite et un plan de l'espace sont soit **sécants** soit **parallèles**.
- Une droite  $d$  est parallèle à un plan  $P$  s'il existe une droite  $d'$  de  $P$  parallèle à  $d$ .
- Si un plan  $P$  contient deux droites sécantes  $d$  et  $d'$  parallèles à un plan  $P'$  alors les plans  $P$  et  $P'$  sont parallèles.
- Si deux plans sont parallèles alors tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre et leurs intersections sont deux droites parallèles.

## Les méthodes – T° spé : Vecteurs dans l'espace

### Colinéarité et relation de Chasles :

Soit  $ABCD$  un tétraèdre et les points  $M$  et  $N$  tels que  $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$  et  $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{BC}$ .

Démontrer que les vecteurs  $\overrightarrow{MC}$  et  $\overrightarrow{AN}$  sont colinéaires.

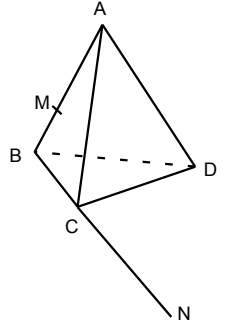
**Solution :**

Nous allons exprimer les deux vecteurs dans une même base :

D'une part,  $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC}$  (relation de Chasles). Donc,  $\overrightarrow{MC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ .

D'autre part,  $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$ .

Nous remarquons que  $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{MC}$ . Les vecteurs  $\overrightarrow{MC}$  et  $\overrightarrow{AN}$  sont donc colinéaires.



### Montrer que trois vecteurs sont coplanaires :

Soit  $ABCD$  un tétraèdre. Soit  $M$  le point tel que  $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}$ . Montrer que le point  $M$  appartient au plan  $(ABC)$ .

**Solution :**

Montrer que les quatre points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $M$  sont coplanaires revient à montrer que les 3 vecteurs  $\overrightarrow{AM}$ ,  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  le sont. Nous cherchons donc à exprimer  $\overrightarrow{AM}$  comme une combinaison linéaire de  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$ .

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} &= 3\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} \\ \overrightarrow{AM} &= 3(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}) + (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM}) \\ \overrightarrow{AM} &= 3\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} \\ \overrightarrow{AM} &= 3\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} + 4\overrightarrow{AM} \\ -3\overrightarrow{AM} &= 3\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} \\ \overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

Les 3 vecteurs  $\overrightarrow{AM}$ ,  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont donc coplanaires et ainsi les quatre points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $M$ . le point  $M$  appartient au plan  $(ABC)$ .

### Travailler avec les coordonnées :

Dans l'espace muni d'un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ , on considère les points  $A(1; 0,5; 2)$ ,  $B(0; 2; 0,5)$ ,  $D(3; -2,5; 1)$ ,  $E(1; 0,5; 4)$  et  $F(-3; -2; 1)$ .

- Le point  $A$  appartient-il à la droite  $(BD)$  ?
- Les points  $A$ ,  $B$ ,  $D$  et  $E$  sont-ils coplanaires ?
- Le point  $F$  appartient-il au plan  $(ABD)$  ?

**Solution :**

a) Nous allons chercher si les points  $A$ ,  $B$  et  $D$  sont alignés :  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 0-1 \\ 2-0,5 \\ 0,5-2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 1,5 \\ -1,5 \end{pmatrix}$ ,  $\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 3-1 \\ -2,5-0,5 \\ 1-2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

Les coordonnées des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AD}$  ne sont pas proportionnelles ( $\frac{-3}{1,5} \neq \frac{-1}{-1,5}$ ). Il n'existe donc aucun nombre réel  $k$  tel que  $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AD}$ . Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Et donc  $A$  n'appartient pas à la droite  $(BD)$ .

b) Les points  $A$ ,  $B$ ,  $D$  et  $E$  sont coplanaires si l'on peut exprimer les vecteur  $\overrightarrow{AE}$  comme une combinaison linéaire de  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AD}$  : existe-t-il  $a$  et  $b$  tels que  $\overrightarrow{AE} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AD}$  ?

Les coordonnées de  $\vec{AE}$  sont  $\vec{AE} \begin{pmatrix} 1-1 \\ 0,5-0,5 \\ 4-2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{AE} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Ainsi,

$$\vec{AE} = a\vec{AB} + b\vec{AD}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -a + 2b \\ 0 = 1,5a - 3b \\ 2 = -1,5a - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ a = 2b \\ 3a + 2b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ a = 2b \\ 3 \times 2b + 2b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ a = 2b \\ 8b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -0,5 \end{cases}$$

Nous avons donc  $\vec{AE} = -\vec{AB} - 0,5\vec{AD}$

Les points  $A, B, D$  et  $E$  sont donc coplanaires.

b) Les points  $A, B, D$  et  $F$  sont coplanaires si l'on peut exprimer le vecteur  $\vec{AF}$  comme une combinaison linéaire de  $\vec{AB}$  et  $\vec{AD}$  : existe-t-il  $a$  et  $b$  tels que  $\vec{AF} = a\vec{AB} + b\vec{AD}$  ?

Les coordonnées de  $\vec{AF}$  sont  $\vec{AF} \begin{pmatrix} -3-1 \\ -2-0,5 \\ 1-2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{AF} \begin{pmatrix} -4 \\ -2,5 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Ainsi,

$$\vec{AF} = a\vec{AB} + b\vec{AD}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4 = -a + 2b \\ -2,5 = 1,5a - 3b \\ -1 = -1,5a - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b + 4 \\ -5 = 3(2b + 4) - 6b \\ 2 = 3(2b + 4) + 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b + 4 \\ -5 = 12 \\ 8b = -10 \end{cases}$$

Il n'existe donc pas de couple de réels  $a$  et  $b$  solution de ce système. Les points  $A, B, D$  et  $F$  sont donc non coplanaires. Le point  $F$  n'appartient pas au plan  $(ABD)$ . **On peut ajouter que les trois vecteurs  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AD}$  et  $\vec{AF}$  forment une base de l'espace.**

**Autres méthodes, astuces, notions... rencontrées :**

## Le cours – T° spé : Droite dans l'espace

### Représentation paramétrique de droite :

Soit une droite  $(d)$  passant par un point  $A(x_A; y_A; z_A)$  et de vecteur directeur  $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

On a :  $M(x; y; z) \in (d) \Leftrightarrow$  Il existe un réel  $t$  tel que 
$$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$$

Ce système s'appelle une **représentation paramétrique** de la droite  $(d)$ .

## Les méthodes – T° spé : Droite dans l'espace

### Utiliser les représentations paramétriques de droites :

On considère la droite  $(d)$  de représentation paramétrique 
$$\begin{cases} x = 5 - t \\ y = -1 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

a) Le point  $A(3; 5; -2)$  appartient-il à la droite  $(d)$  ?

b) Donner les coordonnées de 2 points de  $(d)$ , ainsi que celles de 2 vecteurs directeurs de  $(d)$ .

c)  $(d)$  est-elle parallèle à la droite  $(d')$  de représentation paramétrique 
$$\begin{cases} x = 6 + 2k \\ y = 1 - 6k \\ z = -5 - 2k \end{cases}, \text{ avec } k \in \mathbb{R} ?$$

**Solution :**

a) Le point  $A$  appartient à  $(d)$  si, et seulement si, il existe un réel  $t$  tel que 
$$\begin{cases} x_A = 5 - t \\ y_A = -1 + 3t \\ z_A = 1 + t \end{cases}$$
, ce qui équivaut à

$$\begin{cases} 3 = 5 - t \\ 5 = -1 + 3t \\ -2 = 1 + t \end{cases}, \text{ soit à } \begin{cases} t = 2 \\ t = 2 \\ t = -3 \end{cases}.$$
 Ceci implique qu'il n'existe pas de réel  $t$  vérifiant les trois équations : on en déduit que le point  $A$  n'appartient pas à la droite  $(d)$ .

b) Pour  $t = 0$ , on a le point  $B(5; -1; 1)$ . Pour  $t = 1$ , on a le point  $C(4; 2; 2)$ . Un vecteur directeur  $\vec{u}_1$  a pour coordonnées  $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Tout vecteur colinéaire à  $\vec{u}_1$  est un vecteur directeur. Par exemple  $\vec{u}_2 = 2\vec{u}_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

c) Un vecteur directeur de  $(d')$  a pour coordonnées  $\vec{u}' \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$ . On remarque que  $\vec{u}' = -2\vec{u}_1$ . Comme les vecteurs directeurs sont colinéaires, les deux droites sont parallèles.

### Déterminer l'intersection de 2 droites :

On considère les droites  $(d)$  et  $(d')$  de représentations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 4 + 3t \end{cases}, \text{ avec } t \in \mathbb{R} \text{ et } \begin{cases} x = 1 - 3k \\ y = 1 + k \\ z = 2 - 5k \end{cases}, \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

Démontrer que ces deux droites sont sécantes en un point  $A$  dont on déterminera les coordonnées.

**Solution :**

Les deux droites ne sont pas parallèles car leurs vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires.

Les deux droites sont alors sécantes si, et seulement si, il existe un couple  $(t; k)$  de réels solution du système

$$\begin{cases} 3 + 2t = 1 - 3k \\ -1 - t = 1 + k \\ 4 + 3t = 2 - 5k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t + 3k = -2 \\ -t - k = 2 \\ 3t + 5k = -2 \end{cases}.$$

Avec les deux premières équations, nous obtenons :

$$\begin{cases} 2t + 3k = -2 \\ -t - k = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t + 3k = -2 \\ -2t - 2k = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t + 3k = -2 \\ k = 2 \end{cases} \quad (L_2 = L_1 + L_2).$$

On vérifie si la dernière égalité est vérifiée par ces deux valeurs :  $3t + 5k = 3 \times (-4) + 5 \times 2 = -2$  ce qui convient.

Les deux droites sont donc sécantes. Le point  $A$  est le point de  $(d)$  de paramètre  $-4$  et le point de  $(d')$  de paramètre  $2$ .

$$\begin{cases} x_A = 3 + 2 \times (-4) \\ y_A = -1 - (-4) \\ z_A = 4 + 3 \times (-4) \end{cases} \text{ d'où } A(-5; 3; -8)$$

### Démontrer que 2 droites sont non coplanaires :

On considère les droites  $(d)$  et  $(d')$  de représentations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 4 + 3t \end{cases}, \text{ avec } t \in \mathbb{R} \text{ et } \begin{cases} x = 1 - 3k \\ y = 1 + k \\ z = 3 - 5k \end{cases}, \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

Démontrer que ces deux droites sont non coplanaires.

**Solution :**

Les deux droites ne sont pas parallèles car leurs vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires.

Les deux droites sont alors sécantes si, et seulement si, il existe un couple  $(t; k)$  de réels solution du système

$$\begin{cases} 3 + 2t = 1 - 3k \\ -1 - t = 1 + k \\ 4 + 3t = 3 - 5k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t + 3k = -2 \\ -t - k = 2 \\ 3t + 5k = -1 \end{cases}.$$

Avec les deux premières équations, nous obtenons :

$$\begin{cases} 2t + 3k = -2 \\ -t - k = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t + 3k = -2 \\ -2t - 2k = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t + 3k = -2 \\ k = 2 \end{cases} \quad (L_2 = L_1 + L_2).$$

On vérifie si la dernière égalité est vérifiée par ces deux valeurs :  $3t + 5k = 3 \times (-4) + 5 \times 2 = -2 \neq -1$ .

La dernière égalité n'est pas vérifiée. Les droites ne sont donc pas sécantes et en conséquence sont non coplanaires.

### Autres méthodes, astuces, notions... rencontrées :

# Le cours – T° spé : Produit scalaire dans l'espace

Prérequis : Produit scalaire, droites et cercles, vecteurs dans l'espace, droites espace

## Définition et propriétés :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}; \vec{v})$$

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \quad \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \quad (k \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k \vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v}), k \in \mathbb{R}$$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$  équivaut à  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux (s'ils sont non nuls)

## Autres propriétés du produit scalaire :

**Expression analytique :** Si  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$  dans un repère orthonormé, alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = x x' + y y' + z z'$

En particulier  $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  et  $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2) \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

L'application de la deuxième formule dans un triangle ABC donne la formule d'Al-Kashi :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$$

## Équation de plan et positions relatives :

Un plan  $P$  de vecteur normal  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  non nul admet une **équation cartésienne** de la forme  $ax + by + cz + d = 0$

Un vecteur non nul  $\vec{n}$  de l'espace est **normal à un plan  $\mathcal{P}$**  s'il est orthogonal à **deux vecteurs non colinéaires** de  $\mathcal{P}$ .

Deux droites  $d_1$  et  $d_2$  de vecteurs directeurs respectifs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont **orthogonales** si et seulement si  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .

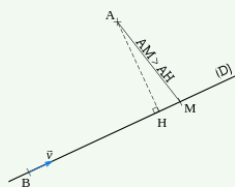
### Positions droite-plan

Positions relatives	$d$ et $P$ sécants	$d$ et $P$ parallèles	
		$d$ et $P$ strictement parallèles	$d$ incluse dans $P$
- Droite $d$ de vecteur directeur $\vec{u}$ - Plan $P$ de vecteur normal $\vec{n}$			
<b>Vecteurs</b>	$\vec{u}$ et $\vec{n}$ non orthogonaux	$\vec{u}$ et $\vec{n}$ orthogonaux	
<b>Produit scalaire</b>	$\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0$	$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$	

### Positions plan-plan

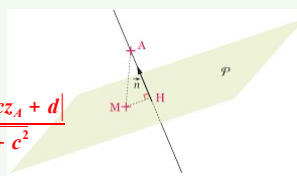
Positions relatives	$P_1$ et $P_2$ parallèles	$P_1$ et $P_2$ sécants	
		$P_1$ et $P_2$ perpendiculaires	
- Plan $P_1$ de vecteur normal $\vec{n}_1$ - Plan $P_2$ de vecteur normal $\vec{n}_2$			
<b>Vecteurs</b>	$\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ colinéaires	$\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ non colinéaires	$\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ orthogonaux $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$

### Distance AH d'un point à une droite



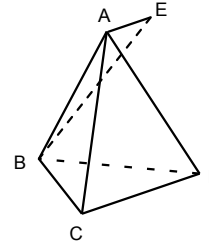
### Distance AH d'un point à un plan

$$d(A, \text{Plan}) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$



# Les méthodes – T° spé : Produit scalaire dans l'espace

## Un exercice sans coordonnée :



Soit  $ABCD$  un tétraèdre régulier d'arête de longueur  $a$  et  $E$  le point défini par  $\vec{AE} = \frac{1}{3}\vec{CD}$ .

- 1) Calculer les produits scalaires  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$  et  $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$
- 2) Calculer  $\vec{AB} \cdot \vec{CD}$
- 3) En déduire que le triangle  $ABE$  est rectangle en  $A$ .
- 4) Calculer l'angle  $\widehat{AEB}$  au degré près.

### Solution :

1) Le triangle  $ABC$  est un triangle équilatéral (comme le tétraèdre est régulier), donc nous savons que  $\widehat{BAC} = 60^\circ$ .

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\vec{AB}; \vec{AC}) = a \times a \times \cos(60) = \frac{a^2}{2}$$

$$\text{De même, } \vec{AB} \cdot \vec{AD} = \frac{a^2}{2}$$

$$2) \vec{AB} \cdot \vec{CD} = \vec{AB} \cdot (\vec{CA} + \vec{AD}) = \vec{AB} \cdot \vec{CA} + \vec{AB} \cdot \vec{AD} = -\vec{AB} \cdot \vec{AC} + \vec{AB} \cdot \vec{AD} = -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = 0$$

3) Calculons  $\vec{AB} \cdot \vec{AE}$  :

$\vec{AB} \cdot \vec{AE} = \vec{AB} \cdot \left(\frac{1}{3}\vec{CD}\right) = \frac{1}{3}\vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0$  d'après la question précédente. Nous pouvons en conclure que les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AE}$  sont orthogonaux et ainsi que le triangle  $ABE$  est rectangle en  $A$ .

4) Dans le triangle  $ABE$  rectangle en  $A$ ,  $\tan(\widehat{AEB}) = \frac{AB}{AE} = \frac{a}{\frac{1}{3}a} = 3$ . Nous avons donc  $\widehat{AEB} \approx 72^\circ$

Ne pas oublier de mettre la calculatrice en degré dans SET UP.

## Équation cartésienne de plan :

1) Soit  $A(-1; 2; 5)$  et  $B(3; 8; 7)$  deux points de l'espace et  $\vec{n} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$  un vecteur.

- a) Déterminer une équation du plan  $\mathcal{P}$  passant par  $A$  et de vecteur normal  $\vec{n}$ .
- b) Déterminer une équation du plan médiateur  $\mathcal{P}'$  du segment  $[AB]$ .

### Solution :

a)  $\vec{n}$  est un vecteur normal à  $\mathcal{P}$ , donc l'équation cartésienne de  $\mathcal{P}$  est de la forme :  $-3x + y + 4z + d = 0$ .

De plus,  $A \in \mathcal{P}$ , donc  $-3 \times (-1) + 2 + 4 \times 5 + d = 0$  et ainsi  $d = -25$ .

L'équation cartésienne de  $\mathcal{P}$  est donc :  $-3x + y + 4z - 25 = 0$ .

b)  $\mathcal{P}'$  est le plan médiateur de  $[AB]$ .  $\vec{AB}$  est donc un vecteur normal à  $\mathcal{P}'$ . Les coordonnées de  $\vec{AB}$  sont  $\vec{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

Nous prendrons comme vecteur normal le vecteur  $\frac{1}{2}\vec{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ . L'équation cartésienne de  $\mathcal{P}'$  est donc de la forme :

$$2x + 3y + z + d = 0$$

De plus, le milieu  $I$  de  $[AB]$  appartient à  $\mathcal{P}'$ .  $I$  a pour coordonnées :  $I(1; 5; 6)$ . Ainsi,  $2 \times 1 + 3 \times 5 + 6 + d = 0$  et  $d = -23$ .

L'équation cartésienne de  $\mathcal{P}'$  est donc :  $2x + 3y + z - 23 = 0$ .

1) Soit  $A(1;0;3)$  et  $B(2;2;7)$  et  $C(-1;5;4)$  trois points de l'espace et  $\mathcal{P}$  le plan d'équation cartésienne  $2x + y - z + 1 = 0$ .

- Démontrer que les points  $A, B$  et  $C$  définissent un plan.
- Démontrer que  $\mathcal{P}$  est le plan  $(ABC)$ .
- En déduire un vecteur normal au plan  $(ABC)$ .

**Solution :**

a) 3 points définissent un plan s'ils ne sont pas alignés. Vérifions donc la non colinéarité des deux vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  :

$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$  et  $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Il n'existe aucun nombre réel  $k$  tel que  $\overrightarrow{AB} = k \overrightarrow{AC}$ . Les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  ne sont donc pas

colinéaires et les points  $A, B$  et  $C$  non alignés. Ils définissent donc un plan  $(ABC)$ .

b) Le plan  $\mathcal{P}$  est le plan  $(ABC)$  si les trois points  $A, B$  et  $C$  appartiennent à  $\mathcal{P}$ . Vérifions donc si les coordonnées de  $A, B$  et  $C$  vérifient l'équation de  $\mathcal{P}$  :

$2 \times 1 + 0 - 3 + 1 = 2 - 3 + 1 = 0$ , donc  $A \in \mathcal{P}$ .

$2 \times 2 + 2 - 7 + 1 = 4 + 2 - 7 + 1 = 0$ , donc  $B \in \mathcal{P}$ .

$2 \times (-1) + 5 - 4 + 1 = -2 + 5 - 4 + 1 = 0$ , donc  $C \in \mathcal{P}$ .

$\mathcal{P}$  est donc le plan  $(ABC)$ .

c) Comme  $2x + y - z + 1 = 0$  est l'équation cartésienne de  $(ABC)$ , un vecteur normal à  $(ABC)$  est  $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

### Exercice type bac :

Dans l'espace, rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les points :

$A(2; 0; 3), B(0; 2; 1), C(-1; -1; 2)$  et  $D(3; -3; -1)$ .

#### 1. Calcul d'un angle

- Calculer les coordonnées des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  et en déduire que les points  $A, B$  et  $C$  ne sont pas alignés.
- Calculer les longueurs  $AB$  et  $AC$ .
- À l'aide du produit scalaire  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ , déterminer la valeur du cosinus de l'angle  $\widehat{BAC}$  puis donner une valeur approchée de la mesure de l'angle  $\widehat{BAC}$  au dixième de degré.

#### 2. Calcul d'une aire

- Déterminer une équation du plan  $\mathcal{P}$  passant par le point  $C$  et perpendiculaire à la droite  $(AB)$ .
- Donner une représentation paramétrique de la droite  $(AB)$ .
- En déduire les coordonnées du projeté orthogonal  $E$  du point  $C$  sur la droite  $(AB)$ , c'est-à-dire du point d'intersection de la droite  $(AB)$  et du plan  $\mathcal{P}$ .
- Calculer l'aire du triangle  $ABC$ .

#### 3. Calcul d'un volume

- Soit le point  $F(1; -1; 3)$ . Montrer que les points  $A, B, C$  et  $F$  sont coplanaires.
- Vérifier que la droite  $(FD)$  est orthogonale au plan  $(ABC)$ .
- Sachant que le volume d'un tétraèdre est égal au tiers de l'aire de sa base multiplié par sa hauteur, calculer le volume du tétraèdre  $ABCD$ .

**Solution :**

#### 1. Calcul d'un angle

a.  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$  et  $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ; or ces coordonnées ne sont pas proportionnelles  $\frac{-2}{-3} \neq \frac{2}{-1} \neq \frac{-2}{-1}$ ,

donc il n'existe pas de réel  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $\overrightarrow{AB} = \alpha \overrightarrow{AC}$  : ces vecteurs ne sont pas colinéaires donc les points  $A, B$  et  $C$  ne sont pas alignés.

b. •  $AB^2 = 4 + 4 + 4 = 3 \times 4$ , donc  $AB = 2\sqrt{3}$  :

•  $AC^2 = 9 + 1 + 1 = 11$ , donc  $AC = \sqrt{11}$ .

c. • D'une part  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6 - 2 + 2 = 6$ ;

• D'autre part  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$ .

On a donc  $6 = 2\sqrt{3} \times \sqrt{11} \times \cos \widehat{BAC} \iff \cos \widehat{BAC} = \frac{6}{2\sqrt{3} \times \sqrt{11}} = \frac{3}{\sqrt{33}}$ .

La calculatrice donne  $\widehat{BAC} \approx 58,51$ , soit  $58,5^\circ$  au dixième près.

#### 2. Calcul d'une aire

a. Soit  $M(x; y; z)$  un point de  $\mathcal{P}$ . On a  $M(x; y; z) \in \mathcal{P} \iff \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ .

Avec  $\overrightarrow{CM} \begin{pmatrix} x+1 \\ y+1 \\ z-2 \end{pmatrix}$ , on obtient :

$-2(x+1) + 2(y+1) - 2(z-2) = 0 \iff -(x+1) + (y+1) - (z-2) = 0 \iff -x + y - z + 2 = 0$ .

Méthode différente de celle vue en cours mais équivalente !

b. En prenant le vecteur  $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$  comme vecteur directeur de la droite  $(AB)$ , soit  $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  on

a :

$M(x; y; z) \in (AB) \iff \overrightarrow{AM} = t \times \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \iff \begin{cases} x-2 = t \times (-1) \\ y-0 = t \times 1 \\ z-3 = t \times (-1) \end{cases}, t \in \mathbb{R} \iff$

$\begin{cases} x = 2-t \\ y = t \\ z = 3-t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ .

c. E projeté orthogonal de  $C$  sur  $(AB)$  appartient au plan  $\mathcal{P}$  et à la droite  $(AB)$ ; ses coordonnées vérifient donc l'équation de  $\mathcal{P}$  et les équations paramétriques de  $(AB)$ , donc le système :

$\begin{cases} -x + y - z + 2 = 0 \\ x = 2-t \\ y = t \\ z = 3-t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ ; en remplaçant  $x, y$  et  $z$  par leurs expressions en fonction de  $t$  dans l'équation de  $\mathcal{P}$  on obtient :

$-2 + t + t - 3 + t + 2 = 0 \iff 3t - 3 = 0 \iff t = 1$ .

On a donc  $E(1; 1; 2)$ .

d. On a  $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ , d'où  $BC^2 = 1 + 9 + 1 = 11$  et  $BC = \sqrt{11}$ .

Comme  $AC = BC = \sqrt{11}$ , le triangle ABC est isocèle en C; or on a vu que E est le projeté de C sur la droite (AB), donc dans le triangle isocèle (ABC), [CE] est la hauteur relative à la base [AB].

On a  $\overrightarrow{CE} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ , d'où  $CE^2 = 1 + 4 = 8$  et  $CE = 2\sqrt{2}$ .

L'aire du triangle (ABC) est donc égale à :

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{AB \times CE}{2} = \frac{2\sqrt{3} \times 2\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{6}.$$

### 3. Calcul d'un volume

a.  $F \in (ABC) \iff$  il existe  $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}$ , tels que :  $\overrightarrow{AF} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC} \iff$

$$\begin{cases} -1 &= -2\alpha - 3\beta \\ -1 &= 2\alpha - \beta \\ 0 &= -2\alpha - \beta \end{cases} \text{ . En ajoutant membre à membre les deux dernières équations on}$$

obtient  $-1 = -2\beta \iff \beta = \frac{1}{2}$  et en remplaçant  $\beta$  par  $\frac{1}{2}$  dans la première équation  $-1 =$

$$-2\alpha + \frac{3}{2} \iff 2\alpha = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \iff \alpha = -\frac{1}{4}.$$

Donc  $\overrightarrow{AF} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$  : les quatre points A, B, C et F sont coplanaires.

b. Avec  $\overrightarrow{FD} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ , on peut calculer :

$$\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{AB} = -2 - 2 + 4 = 0 \text{ et}$$

$$\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{AC} = -6 + 2 + 4 = 0.$$

Le vecteur  $\overrightarrow{FD}$  est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) : il est donc orthogonal à ce plan, ou encore la droite (FD) est orthogonale au plan (ABC).

c. Si l'on choisit comme base le triangle (ABC), la hauteur de ce tétraèdre est donc [FD] et la volume est égal à :

$$\mathcal{V}(ABCD) = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}(ABC) \times FD$$

**Autres méthodes, astuces, notions... rencontrées :**

## Le cours – 1<sup>ère</sup> spé : Probabilités conditionnelles

### Probabilité conditionnelle :

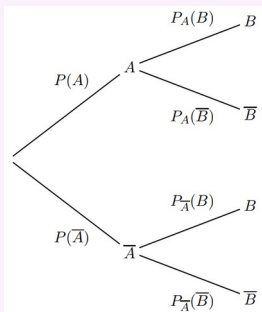
Soit  $A$  et  $B$  deux événements avec  $P(A) \neq 0$ . On appelle **probabilité conditionnelle de  $B$  sachant  $A$** , la probabilité que l'événement  $B$  se réalise sachant que l'événement  $A$  est réalisé. Elle est notée  $P_A(B)$ .

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$$

$$0 \leq P_A(B) \leq 1, \quad P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B)$$

### Arbres pondérés et tableaux :



	$B$	$\bar{B}$	Total
$A$	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(A)$
$\bar{A}$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{A})$
Total	$P(B)$	$P(\bar{B})$	1

### Formule des probabilités totales :

Si  $A_1, A_2, \dots, A_n$  constituent une **partition de l'univers**, alors  $P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B)$

### Cas particulier de 2 événements :

Si  $A$  et  $\bar{A}$  constituent une **partition de l'univers**, alors :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)$$

### Événements indépendants :

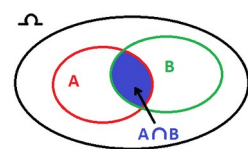
On dit que deux événements  $A$  et  $B$  de probabilité non nulle sont **indépendants** lorsque :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

On a alors  $P_A(B) = P(B)$  et  $P_B(A) = P(A)$ . Si  $A$  et  $B$  sont indépendants alors  $\bar{A}$  et  $B$  sont indépendants.

### Probabilité de l'union :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



## Les méthodes – 1<sup>ère</sup> spé : Probabilités conditionnelles

### Utiliser un arbre pondéré :

Dans un restaurant, 65 % des clients viennent déjeuner le midi, le reste vient le soir. Parmi les clients du midi, 55 % commandent une formule entrée-plat-dessert, contre 30 % pour les clients du soir.

On note :

$F$  l'événement "le client commande une formule entrée-plat-dessert".

$M$  l'événement "le client vient le midi"

1) Comment note-t-on l'événement "le client vient le soir" ?

2) Construire un arbre de probabilités avec les données

3) Traduire par une phrase l'événement  $F \cap M$  et calculer sa probabilité.

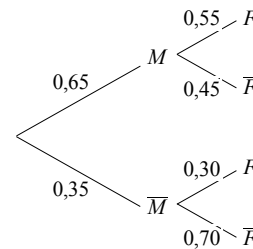
4) Montrer que la probabilité de  $F$  est 0,4625.

5) Un client a commandé une formule entrée-plat-dessert. Quelle est la probabilité, arrondie au millième, qu'il soit un client du midi ?

### Solution :

1) l'événement "le client vient le soir" se note  $\bar{M}$ .

2)



3)  $F \cap M$  est l'événement "le client vient le midi et commande une formule entrée-plat-dessert"

$$P(F \cap M) = P(M) \times P_M(F) = 0,65 \times 0,55 = 0,3575.$$

4)  $M$  et  $\bar{M}$  constituent une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(F) &= P(M \cap F) + P(\bar{M} \cap F) \\ &= P(M) \times P_M(F) + P(\bar{M}) \times P_{\bar{M}}(F) \\ &= 0,65 \times 0,55 + 0,35 \times 0,30 = 0,4625 \end{aligned}$$

5) Nous recherchons  $P_F(M)$ . Avec la formule du cours, nous avons :

$$P_F(M) = \frac{P(F \cap M)}{P(F)} = \frac{0,3575}{0,4625} \approx 0,773.$$

### Événements indépendants :

1) Dans chacun des cas, dire si les événements  $A$  et  $B$  sont indépendants :

a)  $P(A) = \frac{1}{5}$ ,  $P(B) = \frac{1}{2}$  et  $P(A \cap B) = \frac{1}{10}$ .

b)  $P(A) = 0,4$ ,  $P_A(B) = 0,4$  et  $P_B(A) = 0,7$ .

### Solution :

a)  $P(A) \times P(B) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$ . On a  $P(A) \times P(B) = P(A \cap B)$ . Donc les événements  $A$  et  $B$  sont indépendants.

b)  $P(A) \neq P_B(A)$ , donc les événements ne sont pas indépendants.

2) Soient  $A$  et  $B$  deux événements indépendants tels que  $P(A) = 0,3$  et  $P(B) = 0,8$ . Calculer  $P(A \cap B)$ .

### Solution :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0,3 \times 0,8 = 0,24$$

**Utiliser un tableau :**

On donne le tableau suivant où  $A$  et  $B$  sont deux évènements de l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire :

	$B$	$\bar{B}$	Total
$A$	0,32		
$\bar{A}$		0,2	0,36
Total			

- 1) Compléter le tableau en justifiant.
- 2) Calculer  $P_A(B)$ .
- 3) Les évènements  $A$  et  $B$  sont-ils indépendants ?

**Solution :**

$$\begin{aligned} 1) P(\bar{A} \cap B) &= P(\bar{A}) - P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,36 - 0,2 = 0,16 \\ P(B) &= P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = 0,32 + 0,16 = 0,48 \\ P(\bar{B}) &= 1 - P(B) = 1 - 0,48 = 0,52 \\ P(A) &= 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0,36 = 0,64 \\ P(A \cap \bar{B}) &= P(A) - P(A \cap B) = 0,64 - 0,32 = 0,32 \end{aligned}$$

On a donc :

	$B$	$\bar{B}$	Total
$A$	0,32	0,32	0,64
$\bar{A}$	0,16	0,2	0,36
Total	0,48	0,52	1

$$2) P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,32}{0,64} = 0,5.$$

3)  $P(B) \neq P_A(B)$ , donc les évènements  $A$  et  $B$  ne sont pas indépendants.

**Autres méthodes, astuces, notions... rencontrées :**

## Le cours – 1<sup>ère</sup> spé : Variables aléatoires

### Un exemple simple pour comprendre :

Soit l'expérience aléatoire : "On lance un dé à six faces et on regarde le résultat." L'ensemble de toutes les issues possibles  $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$  s'appelle l'univers des possibles.

On considère l'événement A : "On obtient un résultat pair." On a donc :  $A = \{2 ; 4 ; 6\}$ .

On considère l'événement élémentaire E : "On obtient un 3". On a donc :  $E = \{3\}$ .

On considère maintenant le jeu suivant :

- Si le résultat est pair, on gagne 2€.

- Si le résultat est 1, on gagne 3€.

- Si le résultat est 3 ou 5, on perd 4€.

On a défini ainsi une variable aléatoire  $X$  sur  $\Omega$  qui peut prendre les 3 valeurs  $x_1=2$ ,  $x_2=3$  ou  $x_3=-4$ .

La probabilité que la variable aléatoire prenne la valeur 2 est égale à  $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$  (les 3 chiffres pairs). On la

note :  $P(X=2) = \frac{1}{2}$ . De même,  $P(X=3) = \frac{1}{6}$  et  $P(X=-4) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ .

On obtient la loi de probabilité de  $X$  :

$x_i$	2	3	-4
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

$$E(X) = \frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{6} \times 3 + \frac{1}{3} \times (-4) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{4}{3} = \frac{1}{6}$$

$$V(X) = \frac{1}{2} \times \left(2 - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{6} \times \left(3 - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{3} \times \left(-4 - \frac{1}{6}\right)^2 \approx 8,806$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \approx 2,967$$

### Le cours :

Une **variable aléatoire**  $X$  est une fonction définie sur un univers  $\Omega$  et à valeur dans  $\mathbb{R}$ . Elle associe un nombre à des événements.

Soit une variable aléatoire  $X$  définie sur un univers  $\Omega$  et prenant les valeurs  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

La loi de probabilité de  $X$  associe à toute valeur  $x_i$  la probabilité  $P(X=x_i)$ .

On la résume souvent dans un tableau. :

$x_i$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	...	$x_n$
$P(X=x_i)$	$p_1$	$p_2$	$p_3$	...	$p_n$

**La somme des  $p_i$  est toujours égale à 1**

- **L'espérance** mathématique de la loi de probabilité de  $X$  est :

$$E(X) = p_1 \times x_1 + p_2 \times x_2 + p_3 \times x_3 + \dots + p_n \times x_n = \sum_{i=1}^n p_i x_i$$

- **La variance** de la loi de probabilité de  $X$  est :

$$V(X) = p_1 \times (x_1 - E(X))^2 + p_2 \times (x_2 - E(X))^2 + p_3 \times (x_3 - E(X))^2 + \dots + p_n \times (x_n - E(X))^2 = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2$$

- **L'écart-type** de la loi de probabilité de  $X$  est :  $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

## Les méthodes – 1<sup>ère</sup> spé : Variables aléatoires

### Exercices n°1 :

On organise un tombola dans un village. Tous les billets, au nombre de 500, sont vendus. L'un des billets permet de gagner un lot d'une valeur de 620€, neuf billets permettent chacun de gagner un lot d'une valeur de 70€, cinquante billets sont remboursés, et les autres sont perdants. Les billets sont vendus 5€.

Soit  $X$  la variable aléatoire qui, à chaque billet, associe la somme d'argent gagnée (comptée positivement) ou perdue (comptée négativement).

1) Donner les différentes valeurs prises par  $X$ .

2) Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .

3) Calculer l'espérance mathématique de  $X$  et donner une interprétation du résultat obtenu.

**Solution :**

1) Les valeurs prises par  $X$  sont -5, 0, 65 et 615.

2) Loi de probabilité de  $X$  :

$x_i$	-5	0	65	615
$P(X=x_i)$	$\frac{440}{500}$	$\frac{50}{500}$	$\frac{9}{500}$	$\frac{1}{500}$

$$3) E(X) = \frac{440}{500} \times (-5) + \frac{50}{500} \times 0 + \frac{9}{500} \times 65 + \frac{1}{500} \times 615 = -2$$

On peut en conclure qu'en moyenne, les participants perdent 2€. Le village peut espérer gagner  $500 \times 2 = 1000$  €.

### Exercices n°2 :

On considère un jeu pour lequel la probabilité de gagner est de  $\frac{3}{7}$ . Pour jouer, le joueur doit payer  $k$  euros,  $k$  désignant

un entier naturel non nul. Si le joueur gagne, il remporte la somme de 10 euros, sinon il ne remporte rien. On note  $G$  la variable aléatoire égale au gain algébrique d'un joueur (c'est à dire la somme remportée à laquelle on soustrait la somme payée).

1) Déterminer la loi de probabilité de  $G$ .

2) Quelle doit être la valeur maximale de la somme payée au départ pour que le jeu reste favorable au joueur ?

**Solution :**

1) On a  $P(G=10-k) = \frac{3}{7}$  et  $P(G=-k) = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$ . On a donc la loi de probabilité :

$g_i$	$-k$	$10-k$
$P(G=g_i)$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$

2) L'espérance mathématique de la variable  $G$  est égale à

$$E(G) = \frac{4}{7} \times (-k) + \frac{3}{7} \times (10-k) = \frac{-4k+30-3k}{7} = \frac{30-7k}{7}$$

Le jeu est favorable au joueur si :

$$E(G) > 0 \Leftrightarrow \frac{30-7k}{7} > 0 \Leftrightarrow 30-7k > 0 \Leftrightarrow 7k < 30 \Leftrightarrow k < \frac{30}{7} \approx 4,3$$

La somme payée au départ doit être inférieure à 4,3. Elle ne doit donc pas dépasser 4€ afin que le jeu reste favorable au joueur.

## Le cours – T° spé : Dénombrement

Dans ce résumé de cours, nous considérerons pour les exemples les deux ensembles :  $E_1 = \{1; 2; 3; 4\}$  et  $E_2 = \{a; b; c\}$ .  
Nous avons donc  $\text{Card}(E_1) = n_1 = 4$  et  $\text{Card}(E_2) = n_2 = 3$

<b>Principe additif</b> (cardinal de l'union)	Soit $E_1$ et $E_2$ deux ensembles finis <b>disjoints</b> . Le nombre d'éléments de la réunion $E_1 \cup E_2$ est <b><math>\text{Card}(E_1 \cup E_2) = \text{Card}(E_1) + \text{Card}(E_2)</math></b> .	$E_1 \cup E_2 = \{1; 2; 3; 4; a; b; c\}$ $\text{Card}(E_1 \cup E_2) = n_1 + n_2 = 7$
<b>Produit cartésien</b>	Le produit cartésien $E_1 \times E_2$ est l'ensemble des <b>couples</b> $(e_1, e_2)$ où $e_1 \in E_1$ et $e_2 \in E_2$ .  Le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_k$ est l'ensemble des <b>k-uplets</b> $(e_1, e_2, \dots, e_k)$ où $e_1 \in E_1$ et $e_2 \in E_2 \dots e_k \in E_k$ .  Le produit cartésien $E_1^k$ est l'ensemble des <b>k-uplets</b> $(e_1, e_2, \dots, e_k)$ où $e_1, e_2, \dots, e_k \in E_1$ .	$E_1 \times E_2 = \{(1, a); (1, b); (1, c); (2, a); \dots; (3, c)\}$  $E_1^3 = \{(1, 1, 1); (1, 1, 2); (1, 1, 3); \dots; (4, 4, 4)\}$
<b>Principe multiplicatif</b> (cardinal du produit cartésien)	Soit $E_1$ et $E_2$ deux ensembles. Le nombre d'éléments du produit cartésien $E_1 \times E_2$ est <b><math>\text{Card}(E_1 \times E_2) = \text{Card}(E_1) \times \text{Card}(E_2)</math></b> . Généralisable à k ensembles.	$\text{Card}(E_1 \times E_2) = n_1 \times n_2 = 4 \times 3 = 12$  $\text{Card}(E_1^3) = n_1^3 = 4^3 = 64$ (nombre de 3-uplets de $E_1$ )
<b>Parties d'un ensemble</b>	Une partie d'un ensemble $E$ est un ensemble d'éléments de $E$ . L'ensemble des parties de $E$ contient toujours $\emptyset$ et $E$ .  Le nombre de parties de $E$ est <b><math>2^{\text{Card}(E)}</math></b> .	Exemples de parties de $E_1$ : $\emptyset; \{1\}; \{1; 2; 4\}; \{2; 3\} \dots$  il y a $2^n = 2^4 = 16$ parties de $E_1$ .
<b>Nombre de k-uplets de E</b> (répétitions possibles, l'ordre est important)	Soit $E$ un ensemble. Le nombre de k-uplets de E est <b><math>(\text{Card}(E))^k</math></b>	Exemples de 5-uplets de $E_2$ : $(a, a, b, a, c); (a, b, c, a, b); (b, b, a, c, c) \dots$  Il y en a $3^5 = 243$ en tout.
<b>Nombre de k-uplets d'éléments distincts de E</b> (pas de répétition, l'ordre est important)	Soit $E$ un ensemble avec $\text{Card}(E) = n$ . Le nombre de k-uplets d'éléments distincts de $E$ est <b><math>\frac{n!}{(n-k)!}</math></b>	Exemples de 3-uplets d'éléments distincts de $E_1$ : $(1, 2, 3); (3, 2, 1); (4, 1, 3) \dots$  Il y en a en tout : $\frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = 4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$
<b>Nombre de permutations</b> (n-uplets d'éléments distincts) (pas de répétition, l'ordre est important, tous les éléments)	Soit $E$ un ensemble avec $\text{Card}(E) = n$ . Le nombre de permutations de $E$ est <b><math>n!</math></b>	Exemples de permutations de $E_1$ : $(1, 2, 3, 4); (2, 1, 3, 4); (4, 3, 2, 1) \dots$  Il y en a $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ en tout.
<b>Nombre de combinaisons</b> (pas de répétition, l'ordre ne compte pas, k éléments de E)	Une combinaison de k éléments de $E$ est une partie de $E$ à k éléments.  La nombre de combinaisons de k éléments de E est <b><math>\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}</math> (<math>n = \text{Card}(E)</math>)</b>	Exemples de combinaisons de 3 éléments de $E_1$ : $\{1; 2; 3\}; \{1; 2; 4\}; \{2; 3; 4\} \dots$  Il y en a $\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4$ en tout

**Symétrie des coefficients binomiaux :**  $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$  Exemple :  $\binom{10}{9} = \binom{10}{1}$

**Somme des coefficients binomiaux (nombre de parties) :**  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$

**Relation de Pascal :**  $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

	k=0	1	2	3	4	5	6	7
n=0	1							
n=1	1	1						
n=2	1	2	1					
n=3	1	3	3	1				
n=4	1	4	6	4	1			
n=5	1	5	10	10	5	1		
n=6	1	6	15	20	15	6	1	
n=7	1	7	21	35	35	21	7	1

## Les méthodes – T° spé : Dénombrement

### Quelques exemples :

**1)** Dans le championnat de France de rugby, composé de 14 équipes et appelé TOP 14, les six premières équipes qui ont le plus de points à la fin des matchs aller-retour (phase régulière) passent à la deuxième phase du championnat. Combien de **classements** composés des six équipes qui atteignent la deuxième phase sont possibles ?

**Solution :**

Il n'y a pas de répétition et l'ordre des 6 premières équipes est important. Il s'agit donc du nombre de 6-uplets d'éléments distincts de l'ensemble des 14 équipes. Il y a donc  $\frac{14!}{(14-6)!} = \frac{14!}{8!} = 2162160$  classements possibles.

**2)** Combien de classements des 14 équipes de la première phase du TOP 14 sont possibles ?

**Solution :**

Il s'agit du nombre de permutations des 14 équipes. Il y a donc  $14! = 87178291200$  classements possibles.

**3)** On dispose d'un jeu de 32 cartes, toutes différentes. Une « main » de 4 cartes est un ensemble de 4 cartes dont l'ordre n'importe pas.

**a)** Combien de « mains » de 4 cartes peut-on alors former ?

**b)** On tire simultanément 4 cartes au hasard. Quelle est la probabilité d'avoir les 4 as ?

**Solution :**

**a)** L'ordre n'importe pas et il ne peut pas avoir répétition. Il s'agit donc du nombre de combinaisons de 4 cartes parmi les 32. Il y a donc  $\binom{32}{4} = \frac{32!}{4!(32-4)!} = 35960$  mains possibles.

**b)** Il n'y a qu'une main possible contenant les 4 as, la probabilité est donc  $p = \frac{1}{35960}$ .

**4)** Dix amis, dont Hugo et Kylian, se partagent au hasard en deux équipes de 5 pour faire un match de jorki (ou football à 5). Combien d'équipes comportant Hugo et Kylian peut-on former ?

**Solution :**

Hugo et Kylian sont placés dans l'équipe. Il faut ensuite compléter l'équipe avec 3 personnes parmi les 8 amis restants. L'ordre n'importe pas, il s'agit donc du nombre de combinaisons des 3 amis parmi les 8. Il y a donc  $\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = 56$  équipes possibles.

**5)** Un code PIN de smartphone est un code confidentiel composé de 4 chiffres. Combien y a-t-il de codes PIN différents ?

**Solution :**

Il peut y avoir répétition des chiffres et l'ordre est important. Il s'agit donc du nombre de 4-uplets de l'ensemble des chiffres (de 0 à 9). Il y a donc  $10^4 = 10000$  codes PIN différents.

# Le cours – T° spé : Loi binomiale

Prérequis : Proba conditionnelles, variables aléatoires, dénombrement

## Épreuve de Bernoulli :

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire à **deux issues** que l'on peut nommer "**succès**" ou "**échec**".

Une **loi de Bernoulli** est une loi de probabilité qui suit le schéma suivant :

- la probabilité d'obtenir un succès est égale à  $p$ ,
  - la probabilité d'obtenir un échec est égale à  $1 - p$ .
- $p$  est appelé le paramètre de la loi de Bernoulli.

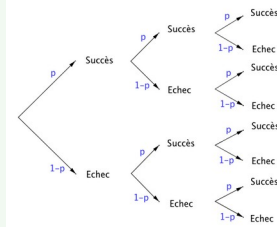
$x_i$	0	1
$P(X=x_i)$	$1-p$	$p$

La **variable aléatoire** qui prend la valeur **1** en cas de succès et **0** en cas d'échec est appelée variable aléatoire de Bernoulli.

## Loi binomiale :

Un **schéma de Bernoulli** est la répétition de  $n$  épreuves de Bernoulli **identiques et indépendantes**.

Soit  $X$  une variable aléatoire qui, à chaque issue d'un schéma de Bernoulli de paramètres  $n$  et  $p$ , associe **le nombre de succès** au cours de ces  $n$  épreuves. La loi de probabilité de  $X$  est appelée **loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$** . On la note  $\mathcal{B}(n, p)$ .



Soit  $X$  une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ . Alors, pour tout entier  $k$  compris entre 0 et  $n$ ,

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$E(X) = n \times p \quad V(X) = np(1-p) \quad \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$$

## Calculatrice :

Taper sur **MENU** et choisir le menu **Statistique** et **DIST** puis **BINOMIAL**.

**Calculer  $P(X = k)$  :**

Pour calculer  $P(X = 5)$  sélectionner **Bpd** puis dans **Data**, écrire Variable (ici 5), dans **Numtrial**, écrire  $n$  (ici 30) et dans **p**, écrire  $p$  (ici 0,2).

Taper sur **EXE** pour obtenir : **D.P. binomiale p=0.17227918**

**Calculer  $P(X \leq k)$  :**

Pour calculer  $P(X \leq 8)$ , sélectionner **Bcd** puis dans **Lower**, écrire 0, dans **Upper**, écrire  $k$  (ici 8) dans **Numtrial**, écrire  $n$  (ici 30) et dans **p** écrire  $p$  (ici 0,2).

Taper sur **EXE** pour obtenir : **D.C. binomiale p=0.87134924**

Appuyer sur la touche **MENU**, sélectionner le menu **Table**, puis suivre les instructions suivantes :

**1** Dans **Y1**, saisir **BinomialCD(X,15,0,3)** Suivi de **EXE**. L'instruction **BinomialCD** se trouve de la façon suivante : **OPTN** puis **F6** puis **STAT** puis **DIST** puis **BINOMIAL** et enfin **Bcd**.

**2** Choisir **SET** puis entrer la première **Start** et la dernière valeur **End**: de  $k$ , ainsi que le pas, suivi de **EXE**.

**3** Choisir **TABL** (touche **F6**).

**4** Le début du tableau de valeurs s'affiche. On obtient la suite du tableau en appuyant sur la touche **↓** du pavé directionnel.

Remarque : pour un tableau des valeurs  $P(X = k)$ , on utilise l'instruction **BinomialPD(Bpd)**.

# Les méthodes – T° spé : Loi binomiale

## Calculs de probabilités avec la loi binomiale :

Soit  $X$  une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres  $n = 10$  et  $p = 0,25$ .

- 1) Calculer  $P(X=0)$  et  $P(X=7)$ .
- 2) Calculer  $P(X \leq 1)$  et  $P(X \leq 6)$ .
- 3) Calculer  $P(X > 1)$  et  $P(X \geq 4)$ .
- 4) Calculer  $E(X)$  et  $\sigma(X)$ .

### Solution :

1)  $P(X=0) = \binom{10}{0} 0,25^0 (1-0,25)^{10} = 0,75^{10} \approx 0,056$ .

$P(X=7) = \binom{10}{7} 0,25^7 (0,75)^3 \approx 0,003$  avec la calculatrice : **BinomialPD(7,10,0,25)**

2)  $P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) = \binom{10}{0} 0,25^0 (1-0,25)^{10} + \binom{10}{1} 0,25^1 (1-0,25)^9 \approx 0,244$ .

$P(X \leq 6) \approx 0,996$  avec la calculatrice : **BinomialCD(6,10,0,25)**

3)  $P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - (P(X=0) + P(X=1)) \approx 0,756$ .

$P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) \approx 0,224$  avec la calculatrice : **1 - BinomialCD(3,10,0,25)**

4)  $E(X) = n \times p = 10 \times 0,25 = 2,5$ .  $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{10 \times 0,25 \times 0,75} \approx 1,369$

## Calcul d'un seuil :

On commande  $n$  casques d'une certaine marque. On assimile cette expérience à un tirage aléatoire avec remise. La probabilité qu'un casque présente un défaut de conception est 0,036. On note  $X$  la variable aléatoire qui donne le nombre de casques présentant un défaut de conception dans ce lot.

- 1) Justifier que  $X$  suit une loi binomiale et donner ses paramètres.
- 2) Quel doit être le nombre minimal de casques à commander pour que la probabilité qu'au moins un casque présente un défaut soit supérieur ou égale à 0,99 ?

### Solution :

1) Il y a répétition de  $n$  épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes (tirage avec remise). Le succès est "le casque a un défaut de conception" et sa probabilité est  $p=0,036$ .  $X$  est la variable aléatoire qui donne le nombre de casques présentant un défaut de conception dans le lot. Donc  $X$  suit bien une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p=0,036$ .

2) Nous cherchons  $n$  tel que  $P(X \geq 1) \geq 0,99$ .

$$P(X \geq 1) \geq 0,99$$

$$1 - P(X=0) \geq 0,99$$

$$-P(X=0) \geq -0,01$$

$$P(X=0) \leq 0,01$$

$$\binom{n}{0} 0,036^0 (1-0,036)^n \leq 0,01$$

$$0,964^n \leq 0,01$$

$$\ln(0,964^n) \leq \ln(0,01)$$

$$n \times \ln(0,964) \leq \ln(0,01)$$

$$n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,964)}$$

$n \geq 125,6$  donc  $n \geq 126$ . Il faut donc commander au minimum 126 casques

**Détermination d'un seuil avec la calculatrice :**

Dans une chaîne de production pharmaceutique, la proportion de gélules non commercialisables en sortie de chaîne est de 3%. On prélève un échantillon de 200 gélules. On note  $X$  la variable aléatoire qui associe le nombre de gélules non commercialisables parmi les 200.

- 1) Quelle est la loi suivie par  $X$  ?
- 2) Déterminer le plus petit entier  $b$  tel que :  $P(X \leq b) \geq 0,9$ .

**Solution :**

1) Il y a répétition de 200 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Le succès est "la gélule est non commercialisable" et sa probabilité est  $p=0,03$ .  $X$  est la variable aléatoire qui associe le nombre de gélules non commercialisables parmi les 200. Donc  $X$  suit une loi binomiale de paramètres  $n=200$  et  $p=0,03$ .



2) Avec le menu table de la calculatrice, on obtient : (on tape dans Y1 : **BinomialCD(X,200,0.03)** )

$P(X \leq 7)$	0,746
$P(X \leq 8)$	0,850
$P(X \leq 9)$	0,919

La valeur de  $b$  recherchée est donc  $b = 9$

**Autres méthodes, astuces, notions... rencontrées :**