

Le cours – T° spé : Limites de suites définies explicitement

Prérequis : [généralités suites](#) ; [suites arithmétiques et géométriques](#)

Les définitions :

- On dit que la suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ si **tout** intervalle $]A; +\infty[$, A réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$
- On dit que la suite (u_n) admet pour limite $-\infty$ si **tout** intervalle $]-\infty; A[$, A réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$
- On dit que la suite (u_n) admet pour limite L si **tout** intervalle ouvert contenant L contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$. Une telle suite est dite **convergente**.

Limites des suites usuelles :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty ; \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty ; \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = +\infty ; \lim_{n \rightarrow +\infty} n^k = +\infty \text{ (pour } k \geq 1 \text{)}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 ; \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0 ; \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 0 ; \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0 \text{ (pour } k \geq 1 \text{)}$$

Opérations sur les limites et formes indéterminées :

Les tableaux des opérations sur les limites ne sont pas à apprendre par cœur, mais à bien comprendre ! Voici quelques résultats d'opérations (attention à l'abus d'écriture à ne pas écrire sur une copie!) :

$$"(-\infty) \times (-\infty)" \rightarrow +\infty \quad " \frac{0^+}{-\infty} " \rightarrow 0^- \quad " \frac{3}{+\infty} " \rightarrow 0^+ \quad " \frac{+\infty}{0^-} " \rightarrow -\infty \quad " \frac{5}{0^+} " \rightarrow +\infty$$

Les formes indéterminées à connaître par cœur

$$"(+\infty) - (+\infty)" \quad "0 \times \infty" \quad " \frac{\infty}{\infty} " \quad " \frac{0}{0} "$$

2 méthodes pour lever une indétermination : 1) factorisation par les plus hauts degrés 2) méthode du "conjugué"

Limites de q^n :

	$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n =$	Pas de limite	0	1	$+\infty$

Théorèmes de comparaison et des gendarmes :

Théorème de comparaison (pour des limites infinies) :

- Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et, à partir d'un certain rang $v_n \geq u_n$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty .$$

- Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ et, à partir d'un certain rang $v_n \leq u_n$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty .$$

Théorème des gendarmes (pour des limites finies) :

Soit (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites telles que, à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n \leq w_n$.

Si (u_n) et (w_n) convergent vers le réel L , alors (v_n) converge vers L .

Les méthodes – T° spé : Limites de suites définies explicitement

Calculs de limites simples :

1) Calculer la limite de la suite (u_n) définie par : $u_n = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + 2\right)(-n^3 + 1)$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty, \text{ donc par quotient, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0^+ \text{ et ainsi } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + 2\right) = 2 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} -n^3 = -\infty \text{ et ainsi } \lim_{n \rightarrow +\infty} (-n^3 + 1) = -\infty \end{array} \right\} \text{ Par produit, nous obtenons : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + 2\right)(-n^3 + 1) = -\infty$$

2) Calculer la limite de la suite (u_n) définie par : $u_n = \frac{4}{n^2 + 5}$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} 4 = 4 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 + 5) = +\infty \end{array} \right\} \text{ Par quotient, nous obtenons : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{n^2 + 5} = 0^+$$

3) Calculer la limite de la suite (u_n) définie par : $u_n = 0,6^n - 5^n$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,6^n = 0 \text{ car } -1 < 0,6 < 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 5^n = +\infty \text{ car } 5 > 1, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} -5^n = -\infty \end{array} \right\} \text{ Par somme, nous obtenons : } \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,6^n - 5^n = -\infty$$

Lever une indétermination :

1) Calculer la limite de la suite (u_n) définie par : $u_n = 2n^2 - 3n + 2$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} 2n^2 = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} -3n + 2 = -\infty \end{array} \right\} \text{ Par somme, nous avons une forme indéterminée}$$

$$u_n = 2n^2 - 3n + 2 = n^2 \left(2 - \frac{3n}{n^2} + \frac{2}{n^2}\right) = n^2 \left(2 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}\right) \quad \text{NE PAS OUBLIER DE SIMPLIFIER !!}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n^2} = 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n} = 0, \text{ ainsi } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}\right) = 2 \end{array} \right\} \text{ Par produit, nous obtenons : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

2) Calculer la limite de la suite (u_n) définie par : $u_n = \frac{3n+1}{n^2+5}$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} 3n+1 = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2+5 = +\infty \end{array} \right\} \text{ Par quotient, nous avons une forme indéterminée}$$

$$u_n = \frac{3n+1}{n^2+5} = \frac{n(3 + \frac{1}{n})}{n^2(1 + \frac{5}{n^2})} = \frac{(3 + \frac{1}{n})}{n(1 + \frac{5}{n^2})} \quad \text{NE PAS OUBLIER DE SIMPLIFIER !!}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{1}{n}\right) = 3 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{5}{n^2}\right) = 1, \text{ ainsi par produit } \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(1 + \frac{5}{n^2}\right) = +\infty \end{array} \right\} \text{ Par quotient, nous obtenons finalement : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0^*$$

3) Calculer la limite de la suite (u_n) définie par : $u_n = n - \sqrt{n}$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} -\sqrt{n} = -\infty \end{array} \right\} \text{ Par somme, nous avons une forme indéterminée}$$

$$u_n = n - \sqrt{n} = n \left(1 - \frac{\sqrt{n}}{n}\right) = n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{NE PAS OUBLIER DE SIMPLIFIER : } \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} \times \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0, \text{ ainsi } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1 \end{array} \right\} \text{ Par produit, nous obtenons : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

4) Calculer la limite de la suite (u_n) définie par : $u_n = 3^n - 5^n$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty \text{ car } 3 > 1, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 5^n = +\infty \text{ car } 5 > 1, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} -5^n = -\infty \end{array} \right\} \text{ Par somme, nous avons une forme indéterminée}$$

$$u_n = 3^n - 5^n = 5^n \left(\frac{3^n}{5^n} - 1\right) = 5^n \left(\left(\frac{3}{5}\right)^n - 1\right)$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} 5^n = +\infty \text{ car } 5 > 1, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0 \text{ car } -1 < \frac{3}{5} < 1, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{3}{5}\right)^n - 1\right) = -1 \end{array} \right\} \text{ Par produit, nous obtenons finalement : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$$

5) Calculer la limite de la suite (u_n) définie par : $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n+3}$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1} = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} -\sqrt{n+3} = -\infty \end{array} \right\} \text{ Par somme, nous avons une forme indéterminée}$$

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n+3} = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n+3}) \times \frac{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+3})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+3})} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n+3}) \times (\sqrt{n+1} + \sqrt{n+3})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+3})} = \frac{(n+1) - (n+3)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+3}}$$

$$u_n = \frac{-2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+3}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} -2 = -2 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1} + \sqrt{n+3} = +\infty \end{array} \right\} \text{ Par quotient, nous obtenons finalement : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

Utiliser le théorème de comparaison :

Calculer la limite de la suite (u_n) définie par : $u_n = n^3 + (-1)^n$.

$(-1)^n$ n'a pas de limite. On ne peut donc pas calculer la limite de (u_n) directement avec les opérations.

Nous savons que $-1 \leq (-1)^n \leq 1$, donc $n^3 - 1 \leq n^3 + (-1)^n \leq n^3 + 1$. En particulier, $n^3 - 1 < n^3 + (-1)^n$.
Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 - 1 = +\infty$, donc **d'après le théorème de comparaison**, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Utiliser le théorème des gendarmes :

Calculer la limite de la suite (u_n) définie par : $u_n = \frac{1}{\sqrt{n} - \cos(n)}$.

$\cos(n)$ n'a pas de limite. On ne peut donc pas calculer la limite de (u_n) directement avec les opérations.
Nous savons que $-1 \leq \cos(n) \leq 1$, donc :

$$\begin{aligned} -1 &\leq \cos(n) \leq 1 \\ 1 &\geq -\cos(n) \geq -1 \\ \sqrt{n} + 1 &\geq \sqrt{n} - \cos(n) \geq \sqrt{n} - 1 \\ \frac{1}{\sqrt{n} + 1} &\leq \frac{1}{\sqrt{n} - \cos(n)} \leq \frac{1}{\sqrt{n} - 1} \text{ car } \sqrt{n} + 1 \geq 0, \sqrt{n} - 1 \geq 0 \text{ et } \sqrt{n} - \cos(n) \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n} - 1} = 0.$$

Donc **d'après le théorème des gendarmes**, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Autres méthodes, astuces, notions... rencontrées :

Le cours – T° spé : Dénombrement

Dans ce résumé de cours, nous considérerons pour les exemples les deux ensembles : $E_1 = \{1; 2; 3; 4\}$ et $E_2 = \{a; b; c\}$.
Nous avons donc $\text{Card}(E_1) = n_1 = 4$ et $\text{Card}(E_2) = n_2 = 3$

Principe additif (cardinal de l'union)	Soit E_1 et E_2 deux ensembles finis disjoints . Le nombre d'éléments de la réunion $E_1 \cup E_2$ est $\text{Card}(E_1 \cup E_2) = \text{Card}(E_1) + \text{Card}(E_2)$.	$E_1 \cup E_2 = \{1; 2; 3; 4; a; b; c\}$ $\text{Card}(E_1 \cup E_2) = n_1 + n_2 = 7$
Produit cartésien	Le produit cartésien $E_1 \times E_2$ est l'ensemble des couples (e_1, e_2) où $e_1 \in E_1$ et $e_2 \in E_2$. Le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_k$ est l'ensemble des k-uplets (e_1, e_2, \dots, e_k) où $e_1 \in E_1$ et $e_2 \in E_2 \dots e_k \in E_k$. Le produit cartésien E_1^k est l'ensemble des k-uplets (e_1, e_2, \dots, e_k) où $e_1, e_2, \dots, e_k \in E_1$.	$E_1 \times E_2 = \{(1, a); (1, b); (1, c); (2, a); \dots; (3, c)\}$ $E_1^3 = \{(1, 1, 1); (1, 1, 2); (1, 1, 3); \dots; (4, 4, 4)\}$
Principe multiplicatif (cardinal du produit cartésien)	Soit E_1 et E_2 deux ensembles. Le nombre d'éléments du produit cartésien $E_1 \times E_2$ est $\text{Card}(E_1 \times E_2) = \text{Card}(E_1) \times \text{Card}(E_2)$. Généralisable à k ensembles.	$\text{Card}(E_1 \times E_2) = n_1 \times n_2 = 4 \times 3 = 12$ $\text{Card}(E_1^3) = n_1^3 = 4^3 = 64$ (nombre de 3-uplets de E_1)
Parties d'un ensemble	Une partie d'un ensemble E est un ensemble d'éléments de E . L'ensemble des parties de E contient toujours \emptyset et E . Le nombre de parties de E est $2^{\text{Card}(E)}$.	Exemples de parties de E_1 : $\emptyset; \{1\}; \{1; 2; 4\}; \{2; 3\} \dots$ il y a $2^n = 2^4 = 16$ parties de E_1 .
Nombre de k-uplets de E (répétitions possibles, l'ordre est important)	Soit E un ensemble. Le nombre de k-uplets de E est $(\text{Card}(E))^k$	Exemples de 5-uplets de E_2 : $(a, a, b, a, c); (a, b, c, a, b); (b, b, a, c, c) \dots$ Il y en a $3^5 = 243$ en tout.
Nombre de k-uplets d'éléments distincts de E (pas de répétition, l'ordre est important)	Soit E un ensemble avec $\text{Card}(E) = n$. Le nombre de k-uplets d'éléments distincts de E est $\frac{n!}{(n-k)!}$	Exemples de 3-uplets d'éléments distincts de E_1 : $(1, 2, 3); (3, 2, 1); (4, 1, 3) \dots$ Il y en a en tout : $\frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = 4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$
Nombre de permutations (n-uplets d'éléments distincts) (pas de répétition, l'ordre est important, tous les éléments)	Soit E un ensemble avec $\text{Card}(E) = n$. Le nombre de permutations de E est $n!$	Exemples de permutations de E_1 : $(1, 2, 3, 4); (2, 1, 3, 4); (4, 3, 2, 1) \dots$ Il y en a $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ en tout.
Nombre de combinaisons (pas de répétition, l'ordre ne compte pas, k éléments de E)	Une combinaison de k éléments de E est une partie de E à k éléments. La nombre de combinaisons de k éléments de E est $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ($n = \text{Card}(E)$)	Exemples de combinaisons de 3 éléments de E_1 : $\{1; 2; 3\}; \{1; 2; 4\}; \{2; 3; 4\} \dots$ Il y en a $\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4$ en tout

Symétrie des coefficients binomiaux : $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ Exemple : $\binom{10}{9} = \binom{10}{1}$

Somme des coefficients binomiaux (nombre de parties) : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$

Relation de Pascal : $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

	k=0	1	2	3	4	5	6	7
n=0	1							
n=1	1	1						
n=2	1	2	1					
n=3	1	3	3	1				
n=4	1	4	6	4	1			
n=5	1	5	10	10	5	1		
n=6	1	6	15	20	15	6	1	
n=7	1	7	21	35	35	21	7	1

Les méthodes – T° spé : Dénombrement

Quelques exemples :

1) Dans le championnat de France de rugby, composé de 14 équipes et appelé TOP 14, les six premières équipes qui ont le plus de points à la fin des matchs aller-retour (phase régulière) passent à la deuxième phase du championnat. Combien de **classements** composés des six équipes qui atteignent la deuxième phase sont possibles ?

Solution :

Il n'y a pas de répétition et l'ordre des 6 premières équipes est important. Il s'agit donc du nombre de 6-uplets d'éléments distincts de l'ensemble des 14 équipes. Il y a donc $\frac{14!}{(14-6)!} = \frac{14!}{8!} = 2162160$ classements possibles.

2) Combien de classements des 14 équipes de la première phase du TOP 14 sont possibles ?

Solution :

Il s'agit du nombre de permutations des 14 équipes. Il y a donc $14! = 87178291200$ classements possibles.

3) On dispose d'un jeu de 32 cartes, toutes différentes. Une « main » de 4 cartes est un ensemble de 4 cartes dont l'ordre n'importe pas.

a) Combien de « mains » de 4 cartes peut-on alors former ?

b) On tire simultanément 4 cartes au hasard. Quelle est la probabilité d'avoir les 4 as ?

Solution :

a) L'ordre n'importe pas et il ne peut pas avoir répétition. Il s'agit donc du nombre de combinaisons de 4 cartes parmi les 32. Il y a donc $\binom{32}{4} = \frac{32!}{4!(32-4)!} = 35960$ mains possibles.

b) Il n'y a qu'une main possible contenant les 4 as, la probabilité est donc $p = \frac{1}{35960}$.

4) Dix amis, dont Hugo et Kylian, se partagent au hasard en deux équipes de 5 pour faire un match de jorki (ou football à 5). Combien d'équipes comportant Hugo et Kylian peut-on former ?

Solution :

Hugo et Kylian sont placés dans l'équipe. Il faut ensuite compléter l'équipe avec 3 personnes parmi les 8 amis restants. L'ordre n'importe pas, il s'agit donc du nombre de combinaisons des 3 amis parmi les 8. Il y a donc $\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = 56$ équipes possibles.

5) Un code PIN de smartphone est un code confidentiel composé de 4 chiffres. Combien y a-t-il de codes PIN différents ?

Solution :

Il peut y avoir répétition des chiffres et l'ordre est important. Il s'agit donc du nombre de 4-uplets de l'ensemble des chiffres (de 0 à 9). Il y a donc $10^4 = 10000$ codes PIN différents.

Le cours – T° spé : Compléments fonctions et TVI

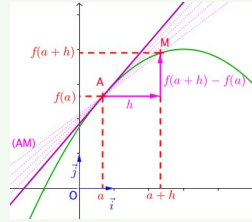
Prérequis : fonctions dérivées, application dérivation, fonction exponentielle

Nombre dérivé, tangente et continuité :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{ou} \quad f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$f'(a)$ est le **nombre dérivé en a**. Il correspond au **coefficient directeur de la tangente** à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse a .

Équation de la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse a : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$



Continuité : f est **continue en a** si : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors la somme $f + g$, le produit $\lambda \times f$, le produit $f \times g$, f^n (ou n est un entier naturel non nul) et $f \circ g$ sont continus sur I . Si de plus g ne s'annule pas sur I alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continus sur I .

et $\frac{f}{g}$ sont continus sur I .

Une fonction **dérivable** sur un intervalle I est **continue** sur cet intervalle.

Dérivées des fonctions composées :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Exemple : si $f(x) = 2x + 6$ et $g(x) = \sqrt{x}$, alors :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{2x + 6} \quad \text{et} \quad (f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2\sqrt{x} + 6$$

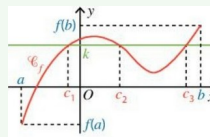
Attention aux ensembles de définition !

Fonction	Dérivée	Exemple
$f(x) = (u(x))^n$	$f'(x) = n \times u'(x) \times (u(x))^{n-1}$	$f(x) = (2x + 6)^5$ $f'(x) = 5 \times 2 \times (2x + 6)^4 = 10(2x + 6)^4$
$f(x) = \sqrt{u(x)}$	$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	$f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$ $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 3}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}$
$f(x) = e^{u(x)}$	$f'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$	$f(x) = e^{x^2 + 1}$ $f'(x) = 3x^2 e^{x^2 + 1}$
$(g \circ f)$	$f' \times (g' \circ f)$	

Théorème des valeurs intermédiaires et son corollaire :

Théorème des valeurs intermédiaires :

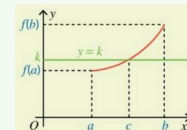
On considère la fonction f **définie** et **continue** sur un intervalle $[a; b]$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **au moins** un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.



Dans ces conditions, l'équation $f(x) = k$ admet **au moins** une solution dans l'intervalle $[a; b]$.

Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires :

On considère la fonction f **définie**, **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle $[a; b]$, alors, pour tout nombre k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ possède une **unique solution** dans l'intervalle $[a; b]$.



Les méthodes – T° spé : Compléments fonctions et TVI

Étude d'une fonction composée :

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{\frac{2x}{3x+1}}$.

- Déterminer l'ensemble de définition de f .
- Étudier les variations de f .

Solutions :

1) f est définie si $\frac{2x}{3x+1} \geq 0$. Il nous faut donc étudier son signe :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	0	$+\infty$	
$2x$	$-$	\vdots	$-$	0	$+$
$3x+1$	$-$	0	$+$	\vdots	$+$
$\frac{2x}{3x+1}$	$+$	$ $	$-$	0	$+$

On en déduit que f est définie sur l'intervalle $D_f =]-\infty; -\frac{1}{3}[\cup]0; +\infty[$.

2) f est de la forme $f(x) = \sqrt{u(x)}$ avec $u(x) = \frac{2x}{3x+1}$. On a $u'(x) = \frac{2(3x+1) - 3 \times 2x}{(3x+1)^2} = \frac{2}{(3x+1)^2}$.

On en déduit : $f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{\frac{2}{(3x+1)^2}}{2\sqrt{\frac{2x}{3x+1}}} = \frac{1}{(3x+1)^2 \sqrt{\frac{2x}{3x+1}}} > 0$ sur D_f .

La fonction f est donc croissante sur son ensemble de définition.

Utilisation du théorème des valeurs intermédiaires :

1) On considère la fonction g , définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = x^3 - 3x - 3$.

a) Étudier le sens de variation de g . On donne les résultats suivants : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$. Dresser son

tableau de variation.

b) Calculer $g(3)$.

c) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans \mathbb{R} , que l'on notera α .

d) A l'aide de la calculatrice, donner la valeur approchée de α à 10^{-2} .

e) A l'aide des résultats précédents, établir le tableau de signe de $g(x)$.

2) f est la fonction définie, pour tout réel x différent de -1 et 1 par $f(x) = \frac{2x^3 + 3}{x^2 - 1}$.

a) Démontrer que, pour tout réel x différent de -1 et de 1 : $f'(x) = \frac{2xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$.

b) Étudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

c) Démontrer que $f(\alpha) = \frac{3(2\alpha + 3)}{\alpha^2 - 1}$

Solution :

1) a) $g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$. On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
g		-1		$+\infty$	

b) $g(3)=14$

c) Sur $]-\infty; 1]$, le maximum de g est -1 . Donc l'équation $g(x)=0$ n'a pas de solution sur cet intervalle.

Sur $[1; +\infty[$, la fonction g est continue et strictement croissante.

$$\left. \begin{array}{l} g(1) = -5 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \end{array} \right\} 0 \in]-5; +\infty[$$



D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaire, l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution dans $[1; +\infty[$, et donc dans \mathbb{R} .

d) A l'aide de la calculatrice, on obtient $\alpha \approx 2,10$. (On peut utiliser la fonction **G-Solv** \rightarrow **X-CAL** sur Casio)

e) Compte tenu des variations de g et des questions précédentes, on obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
g	$-$	0	$+$

2) a) $f'(x) = \frac{6x^2(x^2-1) - 2x(2x^3+3)}{(x^2-1)^2} = \frac{2x(3x(x^2-1) - (2x^3+3))}{(x^2-1)^2} = \frac{2xg(x)}{(x^2-1)^2}$.

b) Le signe de f' dépend du signe de x et de $g(x)$ (trouvé au 1) e). On a donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	-1	0	1	α	$+\infty$		
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+\infty$		-3		$+\infty$		$+\infty$

c) Nous savons que $g(\alpha)=0$. Donc $\alpha^3 - 3\alpha - 3 = 0$ et ainsi $\alpha^3 = 3\alpha + 3$.

$$f(\alpha) = \frac{2\alpha^3 + 3}{\alpha^2 - 1} = \frac{6\alpha + 9}{\alpha^2 - 1} = \frac{3(2\alpha + 3)}{\alpha^2 - 1}$$

Étudier la continuité :

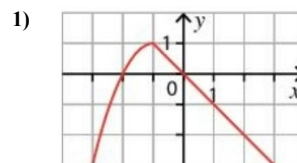
On considère la fonction f , définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x & \text{si } x \leq -1 \\ -x & \text{si } x > -1 \end{cases}$

1) Tracer la courbe représentative de f dans un repère.

2) Étudier la continuité de f :

- a) sur $]-\infty; -1]$ b) sur $]-1; +\infty[$ c) en -1

Solution :



2)

a) La fonction $x \rightarrow -x^2 - 2x$ est une fonction polynôme, donc elle est continue sur \mathbb{R} et donc sur $]-\infty; -1]$.

b) La fonction $x \rightarrow -x$ est une fonction affine, donc elle est continue sur \mathbb{R} et donc sur $]-1; +\infty[$.

c) Nous avons $f(-1) = -(-1)^2 - 2 \times (-1) = 1$. Ensuite,

d'une part $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} -x^2 - 2x = -(-1)^2 - 2 \times (-1) = 1$,

d'autre part $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} -x = -(-1) = 1$.

Ainsi, $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = f(-1) = 1$, donc f est continue en -1 .

Tangente et position relative :

On considère la fonction f , définie sur $[0; 6]$ par : $f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x$.

1) Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 4.

2) Démontrer que $f(x) - (-12x + 64) = (x-4)^3$.

3) En déduire la position relative de la courbe représentative de la fonction f par rapport à la tangente T .

Solution :

1) Pour déterminer l'équation de la tangente, nous avons besoin de f' : $f'(x) = 3x^2 - 24x + 36$.

$$f(4) = 4^3 - 12 \times 4^2 + 36 \times 4 = 16$$

$$f'(4) = 3 \times 4^2 - 24 \times 4 + 36 = -12$$

On a donc :

$$T: y = f'(4)(x-4) + f(4) = -12(x-4) + 16 = -12x + 64.$$

2) $f(x) - (-12x + 64) = x^3 - 12x^2 + 36x + 12x - 64 = x^3 - 12x^2 + 48x - 64$.

Or, $(x-4)^3 = (x-4)^2 \times (x-4) = (x^2 - 8x + 16)(x-4) = x^3 - 12x^2 + 48x - 64$.

Nous avons donc bien $f(x) - (-12x + 64) = (x-4)^3$

3) Pour étudier la position relative de \mathcal{C}_f et T , il nous faut étudier le signe de $f(x) - (-12x + 64)$:

$f(x) - (-12x + 64) = (x-4)^3$. Le signe de $(x-4)^3$ est le même que celui de $x-4$:

x	0	4	6
$x-4$	$-$	0	$+$



Donc, sur $[0; 4]$, \mathcal{C}_f est située en dessous de T et sur $[4; 6]$, \mathcal{C}_f est située au dessus de T .

Le cours – T° spé : Vecteurs dans l'espace

Prérequis : [Produit scalaire, droites et cercles](#)

Vecteurs et colinéarité :

- Un **vecteur** de l'espace est défini par une **direction** de l'espace, un **sens** et une **norme** (longueur).
- $ABDC$ est un **parallélogramme** $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
- Deux vecteurs non nuls sont **colinéaires** si, et seulement si, ils ont **même direction**. Autrement dit, les vecteurs non nuls \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires si, et seulement si, il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.
- Les point A , B et C sont **alignés** si, et seulement si, \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont colinéaires ($\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$).

Droite :

- 2 points **distincts** de l'espace définissent une **droite**.
- On appelle **vecteur directeur** d'une droite d tout vecteur non nul dont la direction est la même que celle de d .
- Un **point A** et un **vecteur \vec{u}** déterminent la droite passant par A et de vecteur directeur \vec{u} .

Plan, repère du plan :

- 3 points A , B et C définissent un plan **s'ils ne sont pas alignés**. Dans ces conditions, le triplet $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ est un **repère du plan**. Les vecteurs de l'espace \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont **non colinéaires**.
- 2 **vecteurs**, comme 3 **points** sont **toujours coplanaires**.
- Trois vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont **coplanaires** si, et seulement si, il existe trois réels a , b et c non tous nuls tels que :
$$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$$
- Trois vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont **coplanaires** si, et seulement si, on peut exprimer l'un en fonction des deux autres :
$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$$

Repère de l'espace :

- 3 vecteurs (ou 4 points) sont **non coplanaires** s'il **n'existe pas** de nombres α et β tels que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.
- On appelle **base de l'espace** tout triplet $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ de vecteurs **non coplanaires**.
- On appelle **repère de l'espace** le quadruplet $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. O est appelé **l'origine du repère**.

La décomposition $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ donne les **coordonnées** $(x; y; z)$ du point M .

La décomposition $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ donne les **coordonnées** $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ du vecteur \vec{u} .

Le vecteur \overrightarrow{AB} a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$

Le milieu I de $[AB]$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{x_A + x_B}{2} \\ \frac{y_A + y_B}{2} \\ \frac{z_A + z_B}{2} \end{pmatrix}$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Positions relatives :

- Deux droites de l'espace sont soit **coplanaires** (dans un même plan) soit **non coplanaires** :
2 droites **parallèles** sont **coplanaires**
2 droites **sécantes** sont **coplanaires**
sinon les droites sont **non coplanaires**
- Deux plans de l'espace sont soit **sécants** soit **parallèles**.
- Une droite et un plan de l'espace sont soit **sécants** soit **parallèles**.
- Une droite d est parallèle à un plan P s'il existe une droite d' de P parallèle à d .
- Si un plan P contient deux droites sécantes d et d' parallèles à un plan P' alors les plans P et P' sont parallèles.
- Si deux plans sont parallèles alors tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre et leurs intersections sont deux droites parallèles.

Les méthodes – T° spé : Vecteurs dans l'espace

Colinéarité et relation de Chasles :

Soit $ABCD$ un tétraèdre et les points M et N tels que $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{BC}$.

Démontrer que les vecteurs \overrightarrow{MC} et \overrightarrow{AN} sont colinéaires.

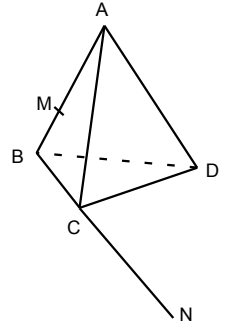
Solution :

Nous allons exprimer les deux vecteurs dans une même base :

D'une part, $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC}$ (relation de Chasles). Donc, $\overrightarrow{MC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

D'autre part, $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$.

Nous remarquons que $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{MC}$. Les vecteurs \overrightarrow{MC} et \overrightarrow{AN} sont donc colinéaires.



Montrer que trois vecteurs sont coplanaires :

Soit $ABCD$ un tétraèdre. Soit M le point tel que $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}$. Montrer que le point M appartient au plan (ABC) .

Solution :

Montrer que les quatre points A , B , C et M sont coplanaires revient à montrer que les 3 vecteurs \overrightarrow{AM} , \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} le sont. Nous cherchons donc à exprimer \overrightarrow{AM} comme une combinaison linéaire de \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} .

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} &= 3\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} \\ \overrightarrow{AM} &= 3(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}) + (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM}) \\ \overrightarrow{AM} &= 3\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} \\ \overrightarrow{AM} &= 3\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} + 4\overrightarrow{AM} \\ -3\overrightarrow{AM} &= 3\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} \\ \overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

Les 3 vecteurs \overrightarrow{AM} , \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont donc coplanaires et ainsi les quatre points A , B , C et M . le point M appartient au plan (ABC) .

Travailler avec les coordonnées :

Dans l'espace muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on considère les points $A(1; 0,5; 2)$, $B(0; 2; 0,5)$, $D(3; -2,5; 1)$, $E(1; 0,5; 4)$ et $F(-3; -2; 1)$.

- Le point A appartient-il à la droite (BD) ?
- Les points A , B , D et E sont-ils coplanaires ?
- Le point F appartient-il au plan (ABD) ?

Solution :

a) Nous allons chercher si les points A , B et D sont alignés : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 0-1 \\ 2-0,5 \\ 0,5-2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 1,5 \\ -1,5 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 3-1 \\ -2,5-0,5 \\ 1-2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AD} ne sont pas proportionnelles ($\frac{-3}{1,5} \neq \frac{-1}{-1,5}$). Il n'existe donc aucun nombre réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AD}$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Et donc A n'appartient pas à la droite (BD) .

b) Les points A , B , D et E sont coplanaires si l'on peut exprimer les vecteur \overrightarrow{AE} comme une combinaison linéaire de \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AD} : existe-t-il a et b tels que $\overrightarrow{AE} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AD}$?

Les coordonnées de \vec{AE} sont $\vec{AE} \begin{pmatrix} 1-1 \\ 0,5-0,5 \\ 4-2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{AE} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Ainsi,

$$\vec{AE} = a\vec{AB} + b\vec{AD}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -a + 2b \\ 0 = 1,5a - 3b \\ 2 = -1,5a - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ a = 2b \\ 3a + 2b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ a = 2b \\ 3 \times 2b + 2b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ a = 2b \\ 8b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -0,5 \end{cases}$$

Nous avons donc $\vec{AE} = -\vec{AB} - 0,5\vec{AD}$

Les points A, B, D et E sont donc coplanaires.

b) Les points A, B, D et F sont coplanaires si l'on peut exprimer le vecteur \vec{AF} comme une combinaison linéaire de \vec{AB} et \vec{AD} : existe-t-il a et b tels que $\vec{AF} = a\vec{AB} + b\vec{AD}$?

Les coordonnées de \vec{AF} sont $\vec{AF} \begin{pmatrix} -3-1 \\ -2-0,5 \\ 1-2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{AF} \begin{pmatrix} -4 \\ -2,5 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ainsi,

$$\vec{AF} = a\vec{AB} + b\vec{AD}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4 = -a + 2b \\ -2,5 = 1,5a - 3b \\ -1 = -1,5a - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b + 4 \\ -5 = 3(2b + 4) - 6b \\ 2 = 3(2b + 4) + 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b + 4 \\ -5 = 12 \\ 8b = -10 \end{cases}$$

Il n'existe donc pas de couple de réels a et b solution de ce système. Les points A, B, D et F sont donc non coplanaires. Le point F n'appartient pas au plan (ABD) . **On peut ajouter que les trois vecteurs \vec{AB} , \vec{AD} et \vec{AF} forment une base de l'espace.**

Autres méthodes, astuces, notions... rencontrées :

Le cours – T° spé : Limites de fonctions

Prérequis : [fonction exponentielle](#), [limites de suites](#), [compléments fonctions](#)

Les définitions :

➤ Les définitions des limites de fonctions en $+\infty$ sont équivalentes à celles des suites (voir [limites de suites](#)). On peut énoncer des définitions équivalentes en $-\infty$

➤ On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ (ou $-\infty$) en A si tout intervalle $]a; +\infty[$ (ou $]-\infty; b]$, a et b réels, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de A et on note : $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = +\infty$ (ou $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = -\infty$).

➤ La droite d'équation $y = L$ est **asymptote horizontale** à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$ (ou $-\infty$) si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ (ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$)

➤ La droite d'équation $x = A$ est **asymptote verticale** à la courbe représentative de la fonction f si $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = +\infty$

Limites des fonctions usuelles :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Opérations sur les limites, formes indéterminées et composition :

Les tableaux des opérations sur les limites sont les mêmes que pour les suites (voir [limites de suites](#)). Voici quelques résultats d'opérations (attention à l'abus d'écriture à ne pas écrire sur une copie!) :

$$"(-\infty) \times (-\infty)" \rightarrow +\infty \quad " \frac{0^+}{-\infty} " \rightarrow 0^- \quad " \frac{3}{+\infty} " \rightarrow 0^+ \quad " \frac{+\infty}{0^-} " \rightarrow -\infty \quad " \frac{5}{0^+} " \rightarrow +\infty$$

Les 4 formes indéterminées à connaître par cœur :

$$"(+\infty) - (+\infty)" \quad "0 \times \infty" \quad " \frac{\infty}{\infty} " \quad " \frac{0}{0} "$$

Composition de fonctions :

a, b et c désignent des nombres réels ou $+\infty$ ou $-\infty$. f et g sont des fonctions.

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \text{ et } \lim_{X \rightarrow b} g(X) = c, \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c$$

Théorèmes de comparaison et des gendarmes :

Théorèmes de comparaison et des gendarmes pour les fonctions identiques à ceux des suites (voir [limites de suites](#)). On a les théorèmes analogues en $-\infty$.

Croissances comparées pour la fonction exponentielle :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty, n \geq 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0, n \geq 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Les méthodes – T° spé : Limites de fonctions

Étude asymptotique d'une fonction :

Soit la fonction f définie sur $]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. En déduire les éventuelles asymptotes.

Limite en $+\infty$:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x+1 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x-3 = +\infty \end{array} \right\} \text{ Par quotient, nous avons une forme indéterminée}$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x-3} = \frac{x(1 + \frac{1}{x})}{x(1 - \frac{3}{x})} = \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{3}{x}}$$

NE PAS OUBLIER DE SIMPLIFIER !!

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{x}) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \frac{3}{x}) = 1 \end{array} \right\} \text{ Par quotient, nous obtenons finalement : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

La droite d'équation $y = 1$ est donc **asymptote horizontale** à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$.

Limite en $-\infty$:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} x+1 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x-3 = -\infty \end{array} \right\} \text{ Par quotient, nous avons une forme indéterminée}$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x-3} = \frac{x(1 + \frac{1}{x})}{x(1 - \frac{3}{x})} = \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{3}{x}}$$

NE PAS OUBLIER DE SIMPLIFIER !!

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + \frac{1}{x}) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - \frac{3}{x}) = 1 \end{array} \right\} \text{ Par quotient, nous obtenons finalement : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

La droite d'équation $y = 1$ est donc **asymptote horizontale** à la courbe représentative de la fonction f en $-\infty$.

Limite en 3 à gauche :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} x+1 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} x-3 = 0^- \end{array} \right\} \text{ Par quotient, nous obtenons : } \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$$

Ici, il ne faut pas oublier le signe du 0. C'est lui qui détermine le signe de la limite !

Limite en 3 à droite :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^+} x+1 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} x-3 = 0^+ \end{array} \right\} \text{ Par quotient, nous obtenons : } \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$$

La droite d'équation $x = 3$ est donc **asymptote verticale** à la courbe représentative de la fonction f (à gauche et à droite).

Limites de fonctions composées :

1) Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{2x^2+3}$. Calculer la limites de f en $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^2+3 = +\infty, \quad \lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty, \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

2) Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x^4+1}}$. Calculer la limites de f en $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^4+1 = +\infty, \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^4+1} = 0. \quad \lim_{X \rightarrow 0} \sqrt{X} = 0, \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

Utiliser les théorèmes de comparaison et des gendarmes :

1) Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^x \cos(x)$. Calculer la limites de f en $-\infty$.

$\cos(x)$ n'a pas de limite en $-\infty$. On ne peut donc pas calculer la limite de f directement avec les opérations.

Nous savons que $-1 \leq \cos(x) \leq 1$, donc $-e^x \leq e^x \cos(x) \leq e^x$.

Or $\lim_{x \rightarrow -\infty} -e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, donc **d'après le théorème des gendarmes**, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

1) Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 - \sin(x)$. Calculer la limites de f en $+\infty$.

$\sin(x)$ n'a pas de limite en $+\infty$. On ne peut donc pas calculer la limite de f directement avec les opérations.

Nous savons que $-1 \leq \sin(x) \leq 1$, donc $x^2-1 \leq x^2-\sin(x) \leq x^2+1$. En particulier, $x^2-1 \leq x^2-\sin(x)$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2-1 = +\infty$, donc **d'après le théorème de comparaison**, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Lever une indétermination en utilisant les croissances comparées :

1) Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{e^x+x}{e^x-x^2}$. Calculer la limites de f en $+\infty$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 = -\infty \end{array} \right\} \text{ Par somme, nous avons une forme indéterminée au dénominateur}$$

$$f(x) = \frac{e^x+x}{e^x-x^2} = \frac{e^x(1+\frac{x}{e^x})}{e^x(1-\frac{x^2}{e^x})} = \frac{1+\frac{x}{e^x}}{1-\frac{x^2}{e^x}}$$

NE PAS OUBLIER DE SIMPLIFIER !!

D'après le cours, nous savons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} = 0$.

De même, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x^2}} = 0$. Ainsi :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{x}{e^x}) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \frac{x^2}{e^x}) = 1 \end{array} \right\} \text{ Par quotient, nous obtenons finalement :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

2) Soit la fonction f définie par $f(x) = x e^{4x}$. Calculer la limites de f en $-\infty$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{4x} = 0 \end{array} \right\} \text{ Par produit, nous avons une forme indéterminée}$$

$f(x) = x e^{4x} = \frac{1}{4} \times 4x e^{4x}$. En posant $X = 4x$, nous avons $f(x) = \frac{1}{4} \times X e^X$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} X = -\infty$.

Or, d'après le cours, nous savons que $\lim_{X \rightarrow -\infty} X e^X = 0$.

Nous pouvons en déduire que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

3) Soit la fonction f définie par $f(x) = 2x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$. Calculer la limites de f en $+\infty$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} - 1 = 0 \end{array} \right\} \text{ Par produit, nous avons une forme indéterminée}$$

$f(x) = 2x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = 2 \times \frac{(e^{\frac{1}{x}} - 1)}{\frac{1}{x}}$. En posant $X = \frac{1}{x}$, nous avons $f(x) = 2 \times \frac{e^X - 1}{X}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} X = 0$.

Or, d'après le cours, nous savons que $\lim_{X \rightarrow 0} \frac{e^X - 1}{X} = 1$.

Nous pouvons en déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$.

Autres méthodes, astuces, notions... rencontrées :

Le cours – T° spé : Réurrence et convergence monotone

Prérequis : généralités suites, suites arithm et géométriques, limites de suites

Raisonnement par récurrence :

$P(n)$ désigne une propriété concernant un entier naturel n et n_0 désigne un entier naturel.

Si l'on démontre les deux étapes suivantes :

- **étape 1 (initialisation) :** $P(n)$ est vraie pour l'entier n_0 ;

- **étape 2 (hérédité) :** pour tout entier $k \geq n_0$, « $P(k)$ est vraie » implique « $P(k+1)$ est vraie » ;

Alors (conclusion) on peut conclure que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Dans un raisonnement par récurrence, pour démontrer l'hérédité :

On considère un entier k , avec $k \geq n_0$, et on suppose que la propriété est vraie au rang k ($P(k)$ vraie). C'est l'**hypothèse de récurrence**. On démontre alors que la propriété est vraie au rang $k+1$ ($P(k+1)$ vraie) en utilisant l'hypothèse de récurrence.

Suite majorée, minorée, bornée :

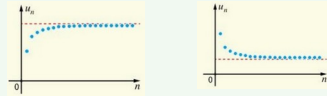
- La suite (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$. M est appelé **majorant** de (u_n) .
- La suite (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$. m est appelé **minorant** de (u_n) .
- La suite (u_n) est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Soit (u_n) une suite croissante définie sur \mathbb{N} . Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$ alors la suite (u_n) est majorée par L .

Soit (u_n) une suite décroissante définie sur \mathbb{N} . Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$ alors la suite (u_n) est minorée par L .

Théorème de convergence monotone :

- Si une suite **croissante et majorée** alors elle est **convergente**.
- Si une suite **décroissante et minorée** alors elle est **convergente**.



- Si une suite **croissante** est **non majorée** alors elle tend vers $+\infty$.
- Si une suite **décroissante** est **non minorée** alors elle tend vers $-\infty$.

Unicité de la limite :

Si la suite (u_n) définie par récurrence par $u_{n+1} = f(u_n)$ est **convergente** de limite L , alors cette limite L est solution de l'équation

$$L = f(L)$$

Les méthodes – T° spé : Réurrence et convergence monotone

Quelques démonstrations par récurrence :

1) On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 0,3u_n + 7$ et $u_0 = 2$.
Démontrer par récurrence que $u_n \leq 10$ pour tout entier naturel n .

Solution :

Soit $P(n)$ la propriété : $u_n \leq 10$.

Initialisation :

$u_0 = 2 \leq 10$, donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

Supposons que la propriété est vraie pour un nombre $k \geq 0$, c'est à dire $u_k \leq 10$ (hypothèse de récurrence)

Démontrons alors que la propriété est vraie au rang $k+1$ ($u_{k+1} \leq 10$) :

En partant de l'hypothèse de récurrence, nous avons

$$u_k \leq 10$$

$$0,3 u_k \leq 3$$

$$0,3 u_k + 7 \leq 10$$

$$u_{k+1} \leq 10$$

La propriété est donc héréditaire.

Conclusion :

$P(0)$ est vraie et $P(n)$ est héréditaire à partir du rang 0, donc $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$.
 $u_n \leq 10$

2) On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_{n+1} = v_n + 2n + 3$ et $v_0 = 1$.

Démontrer par récurrence que $v_n = (n+1)^2$ pour tout entier naturel n .

Solution :

Soit $P(n)$ la propriété : $v_n = (n+1)^2$.

Initialisation :

D'une part, $v_0 = 1$ d'après l'énoncé.

D'autre part, pour $n = 0$, $(n+1)^2 = (0+1)^2 = 1$.

Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

Supposons que la propriété est vraie pour un nombre $k \geq 0$, c'est à dire $v_k = (k+1)^2$ (hypothèse de récurrence)

Démontrons alors que la propriété est vraie au rang $k+1$ ($v_{k+1} = (k+1+1)^2 = (k+2)^2 = k^2 + 4k + 4$) :

D'après l'énoncé,

$$v_{k+1} = v_k + 2k + 3.$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, nous obtenons :

$$v_{k+1} = (k+1)^2 + 2k + 3 = k^2 + 2k + 1 + 2k + 3 = k^2 + 4k + 4$$

La propriété est donc héréditaire.

Conclusion :

$P(0)$ est vraie et $P(n)$ est héréditaire à partir du rang 0, donc $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$.
 $v_n = (n+1)^2$

3) Montrer par récurrence que la suite (w_n) définie sur \mathbb{N} par $w_0 = 1$ et $w_{n+1} = 2w_n - 3$, est décroissante.

Solution :

Soit $P(n)$ la propriété : $w_{n+1} \leq w_n$ (la suite (w_n) est décroissante).

Initialisation :

D'une part, $w_0 = 1$.

D'autre part, $w_1 = 2w_0 - 3 = 2 - 3 = -1$.

Nous avons donc $w_1 \leq w_0$, donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

Supposons que la propriété est vraie pour un nombre $k \geq 0$, c'est à dire $w_{k+1} \leq w_k$ (hypothèse de récurrence)

Démontrons alors que la propriété est vraie au rang $k+1$ ($w_{k+2} \leq w_{k+1}$) :

En partant de l'hypothèse de récurrence, nous avons

$$w_{k+1} \leq w_k$$

$$2w_{k+1} \leq 2w_k$$

$$2w_{k+1} - 3 \leq 2w_k - 3$$

$$w_{k+2} \leq w_{k+1}$$

La propriété est donc héréditaire.

Conclusion :

$P(0)$ est vraie et $P(n)$ est héréditaire à partir du rang 0, donc $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$.
 $w_{n+1} \leq w_n$ et ainsi la suite (w_n) est décroissante

Convergence d'une suite définie par récurrence :

On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{14}{3}$ et $u_0 = 1$

- 1) Démontrer par récurrence que (u_n) est majorée par 7.
- 2) En déduire que la suite (u_n) est croissante.
- 3) Conclure quant à la convergence de la suite (u_n) .
- 4) Calculer la limite L de la suite (u_n) .

Solution :

1) Soit $P(n)$ la propriété : $u_n \leq 7$ ((u_n) est majorée par 7).

Initialisation :

$u_0 = 1 \leq 7$, donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

Supposons que la propriété est vraie pour un nombre $k \geq 0$, c'est à dire $u_k \leq 7$ (hypothèse de récurrence)

Démontrons alors que la propriété est vraie au rang $k+1$ ($u_{k+1} \leq 7$) :

En partant de l'hypothèse de récurrence, nous avons

$$\begin{aligned} u_k &\leq 7 \\ \frac{1}{3}u_k &\leq \frac{7}{3} \\ \frac{1}{3}u_k + \frac{14}{3} &\leq \frac{7}{3} + \frac{14}{3} \\ \frac{1}{3}u_k + \frac{14}{3} &\leq \frac{21}{3} \\ u_{k+1} &\leq 7 \end{aligned}$$

La propriété est donc héréditaire.

Conclusion :

$P(0)$ est vraie et $P(n)$ est héréditaire à partir du rang 0, donc $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$.
 $u_n \leq 7$

2) Pour étudier la **variation de la suite (u_n)** , nous devons étudier le **signe de $u_{n+1} - u_n$** :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}u_n + \frac{14}{3} - u_n = -\frac{2}{3}u_n + \frac{14}{3}$$

Or, nous avons montré au 1) que $u_n \leq 7$, donc :

$$\begin{aligned} u_n &\leq 7 \\ -\frac{2}{3}u_n &\geq -\frac{14}{3} \\ -\frac{2}{3}u_n + \frac{14}{3} &\geq -\frac{14}{3} + \frac{14}{3} \\ u_{n+1} - u_n &\geq 0 \end{aligned}$$

Nous avons donc $u_{n+1} \geq u_n$, la suite (u_n) est croissante.

3) La suite (u_n) est croissante et majorée, donc la suite (u_n) est convergente.

4) la suite (u_n) étant convergente, on calcule la limite en résolvant l'équation :

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{3}L + \frac{14}{3} \\ \frac{2}{3}L &= \frac{14}{3} \\ L &= \frac{14}{3} \times \frac{3}{2} = 7 \end{aligned}$$

Nous avons donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 7$.

ATTENTION :
Ce n'est pas parce que la suite est majorée par 7 que sa limite est 7 !

Récurrence et fonction :

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{3x}{1+2x}$ et la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = 0,7$.

- 1) Étudier les variations de la fonction f .
- 2) Démontrer que $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.
- 3) Conclure quant à la convergence de la suite (u_n) .

Solution :

1) $f'(x) = \frac{3(1+2x) - 3x \times 2}{(1+2x)^2} = \frac{3}{(1+2x)^2} \geq 0$, donc f est croissante sur $]0; +\infty[$.

2) Soit $P(n)$ la propriété : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

Initialisation :

D'une part $u_0 = 0,7$.

D'autre part $u_1 = f(0,7) = \frac{2,1}{1+1,4} = 0,875$.

Nous avons donc $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 1$. $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

Supposons que la propriété est vraie pour un nombre $k \geq 0$, c'est à dire $0 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 1$ (hypothèse de récurrence)

Démontrons alors que la propriété est vraie au rang $k+1$ ($0 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 1$) :

En partant de l'hypothèse de récurrence, nous avons

$$\begin{aligned} 0 &\leq u_k \leq u_{k+1} \leq 1 \\ f(0) &\leq f(u_k) \leq f(u_{k+1}) \leq f(1) \text{ car } f \text{ est croissante.} \\ 0 &\leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 1 \end{aligned}$$

La propriété est donc héréditaire.

Conclusion :

$P(0)$ est vraie et $P(n)$ est héréditaire à partir du rang 0, donc $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$.
 $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$

3) Nous avons démontré dans la question 2) que la suite (u_n) est croissante ($u_n \leq u_{n+1}$) et qu'elle est majorée par 1 ($u_n \leq 1$). Donc la suite (u_n) est convergente. On calcule sa limite en résolvant l'équation $L = f(L)$:

$$\begin{aligned} L &= \frac{3L}{1+2L} \\ L(1+2L) &= 3L \\ 2L^2 - 2L &= 0 \\ L(2L - 2) &= 0 \end{aligned}$$

Donc $L = 0$ ou $L = 1$.

Comme la suite (u_n) est croissante et que $u_0 = 0,7$, la solution est $L = 1$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

Autres méthodes, astuces, notions... rencontrées :

Le cours – T° spé : Logarithme népérien

Prérequis : [fonction exponentielle](#), [compléments fonctions](#), [limites de fonctions](#)

Premières propriétés :

Pour tout réel a **strictement positif**, $e^x = a \Leftrightarrow x = \ln a$
 Pour tout réel a , $\ln(x) = a \Leftrightarrow x = e^a$
 Pour tout réel x **strictement positif**, $e^{\ln x} = x$
 Pour tout réel x , $\ln(e^x) = x$
 $\ln 1 = 0$ $\ln e = 1$ $\ln \frac{1}{e} = -1$

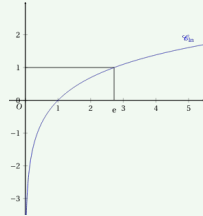
$e^x = 5 \Leftrightarrow x = \ln 5$
 $\ln(x) = -3 \Leftrightarrow x = e^{-3}$
 $x = e^{\ln x}$
 $8 = e^{\ln 8}$

Fonction logarithme :

La fonction logarithme népérien est **continue et dérivable** sur $]0; +\infty[$.

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

x	0	1	e	$+\infty$
$f'(x) = \frac{1}{x}$			+	
$f(x) = \ln x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$



Résolution d'équations, inéquations :

$$\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$$

$$\ln a \geq \ln b \Leftrightarrow a \geq b$$

$$\ln(x+3) = \ln(2) \Leftrightarrow x+3=2$$

$$\ln(2x+1) > \ln(2) \Leftrightarrow 2x+1 > 2$$

Tableau de signe :

x	0	1	$+\infty$	
Signe de $\ln(x)$		-	0	+

Dérivée d'une composée :

Soit u une fonction dérivable et **strictement positive** sur un intervalle I .

$$(\ln u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Relation fonctionnelle et propriétés algébriques :

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$$

$$\ln(a^p) = p \ln a$$

$$\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$$

$$\ln(x) + \ln(x+1) = \ln(x(x+1))$$

$$\ln(x+3) - \ln(2) = \ln\left(\frac{x+3}{2}\right)$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$$

$$\ln(0,6^n) = n \ln(0,6)$$

$$\ln(\sqrt{3}) = \frac{1}{2} \ln(3)$$

Limites et croissances comparées :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Les méthodes – T° spé : Logarithme népérien

Résolutions d'équations, inéquations :

Résoudre $\ln(2x+3) = \ln(x)$

$$\ln(2x+3) \text{ existe si } 2x+3 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{3}{2}$$

$$\ln(x) \text{ existe si } x > 0$$

Le domaine de validité est $D =]0; +\infty[$.

Sur ce domaine :

$$\ln(2x+3) = \ln(x)$$

$$\Leftrightarrow 2x+3 = x$$

$$\Leftrightarrow x = -3$$

$-3 \notin D$, donc l'équation n'a pas de solution.

Résoudre $2\ln(x) + 1 = 7$

Le domaine de validité est $D =]0; +\infty[$.

Sur ce domaine :

$$2\ln(x) + 1 = 7$$

$$\Leftrightarrow 2\ln(x) = 6$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) = 3$$

$$\Leftrightarrow x = e^3$$

$e^3 \in D$, donc la solution est :

$$S = \{e^3\}$$

Résoudre $e^{x-3} > 5$

$$e^{x-3} > 5$$

$$\Leftrightarrow x-3 > \ln(5)$$

$$\Leftrightarrow x > \ln(5) + 3$$

La solution est donc :

$$S =]\ln(5) + 3; +\infty[$$

Résoudre $\ln(x+3) + \ln(2-x) \geq \ln(6)$

$$\ln(x+3) \text{ existe si } x+3 > 0 \Leftrightarrow x > -3$$

$$\ln(2-x) \text{ existe si } 2-x > 0 \Leftrightarrow x < 2$$

Le domaine de validité est $D =]-3; 2[$.

Sur ce domaine :

$$\ln(x+3) + \ln(2-x) \geq \ln(6)$$

$$\Leftrightarrow \ln((x+3)(2-x)) \geq \ln(6)$$

$$\Leftrightarrow (x+3)(2-x) \geq 6$$

$$\Leftrightarrow -x^2 - x + 6 \geq 6$$

$$\Leftrightarrow -x^2 - x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+1) \leq 0$$

x	-3	-1	0	2	
x	-	:	-	0	+
$x+1$	-	0	+	:	+
$x(x+1)$	+	0	-	0	+

Avec le tableau de signe, on trouve finalement $S = [-1; 0]$

Résoudre $0,9^n \leq 0,1$, $n \in \mathbb{N}$

$$0,9^n \leq 0,1$$

$$\Leftrightarrow \ln(0,9^n) \leq \ln(0,1)$$

$$\Leftrightarrow n \times \ln(0,9) \leq \ln(0,1)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,1)}{\ln(0,9)} \quad \text{car } \ln(0,9) < 0$$

Or $\frac{\ln(0,1)}{\ln(0,9)} \approx 21,85$. Comme $n \in \mathbb{N}$, la solution est

finalement $n \geq 22$.

Résoudre $x^{2,7} = 64$, $n \in \mathbb{N}$

$$x^{2,7} = 64$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^{2,7}) = \ln(64)$$

$$\Leftrightarrow 2,7 \times \ln(x) = \ln(64)$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) = \frac{\ln(64)}{2,7}$$

$$\Leftrightarrow x = e^{\frac{\ln(64)}{2,7}}$$

La solution est donc $S = \left\{ e^{\frac{\ln(64)}{2,7}} \right\}$

Simplifications :

Simplifier le nombre $A = \ln(e^3) - \ln\left(\frac{1}{e^2}\right) + 2 \ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$

$$A = \ln(e^3) - \ln\left(\frac{1}{e^2}\right) + 2 \ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$$

$$A = 3 + \ln(e^2) - 2 \ln(\sqrt{e})$$

$$A = 3 + 2 - 2 \times \frac{1}{2} \ln(e)$$

$$A = 3 + 2 - 1 = 4$$

Études de fonctions :

1) Faire l'étude complète de la fonction $f(x) = x^2 - \ln(x)$ définie sur $]0; +\infty[$.

Limite en 0 :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} -\ln(x) = +\infty \end{array} \right\} \text{Par somme, nous obtenons :} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

Limite en $+\infty$:

Par somme, nous avons une **forme indéterminée**. En factorisant par x^2 nous obtenons :

$$f(x) = x^2 \left(1 - \frac{\ln(x)}{x^2}\right)$$

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$ d'après le cours. Ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\ln x}{x^2}\right) = 1$. De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$. Donc, par produit,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Variations :

$f'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x}$. Sur $]0; +\infty[$, f' est donc du signe de $2x^2 - 1$ (signe simple d'un polynôme du 2nd degré) :

x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$+\infty$	$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$+\infty$

2) Soit g la fonction définie par $g(x) = \ln\left(\frac{x+3}{-x+4}\right)$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de g .

b) Calculer $g'(x)$

a) g est définie si $\frac{x+3}{-x+4} > 0$. Nous étudions donc le signe de $\frac{x+3}{-x+4}$:

x	$-\infty$	-3	4	$+\infty$
$x+3$	-	0	+	+
$-x+4$	+	+	0	-
$\frac{x+3}{-x+4}$	-	0	+	-

L'ensemble de définition de g est donc $D_g =]-3; 4[$

b) g est de la forme $\ln(u(x))$ avec $u(x) = \frac{x+3}{-x+4}$. Nous avons donc

$$u'(x) = \frac{-x+4 - (-1)(x+3)}{(-x+4)^2} = \frac{-x+4+x+3}{(-x+4)^2} = \frac{7}{(-x+4)^2}.$$

$$\text{Ainsi, } g'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{\frac{7}{(-x+4)^2}}{\frac{x+3}{-x+4}} = \frac{7}{(-x+4)^2} \times \frac{-x+4}{x+3} = \frac{7}{(-x+4)(x+3)}$$

Autres méthodes, astuces, notions... rencontrées :

Le cours – T° spé : Primitives

Équation différentielle et primitive :

Une **équation différentielle du 1^{er} ordre** est une équation dans laquelle interviennent une fonction dérivable y , sa dérivée y' et la variable x . **L'inconnue de cette équation est la fonction y .**

Exemples d'équations différentielles :

$$y' = x^3 + 1 \qquad xy' + 2y = e^x \qquad 2y' - y = 1$$

Toute fonction solution sur un intervalle I de l'équation différentielle $y' = f$ s'appelle une **primitive** de f sur I .

Une fonction F est une primitive de f sur I si, pour tout réel x de I :

$$F'(x) = f(x)$$

La recherche d'une primitive est l'opération inverse de la dérivation.

Toute fonction continue sur I admet des primitives sur I .

Si F est une primitive de f sur I , alors, pour tout réel k , la fonction $G(x) = F(x) + k$ est aussi une primitive de f sur I .
Une fonction continue sur I admet donc **une infinité de primitives** sur I .

Tableaux des primitives :

Fonction f	Une primitive F	Intervalle de validité
$f(x) = a$	$F(x) = ax$	\mathbb{R}
$f(x) = x^n$ pour n entier différent de -1 et 0	$F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$	• \mathbb{R} lorsque $n > 0$ • $]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$ lorsque $n < 0$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x}$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x)$	$]0; +\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	\mathbb{R}
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x)$	\mathbb{R}
$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x)$	\mathbb{R}

Forme de la fonction	Primitive à une constante près	Conditions
$u' + v'$	$u + v$	u et v dérivables sur I
$\lambda u'$, avec λ réel	λu	
u^n , $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ et $n \neq -1$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	Si n est négatif, alors $u(x) \neq 0$ pour tout x de I .
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$	$u(x) \neq 0$ pour tout x de I
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	\sqrt{u}	$u(x) > 0$ pour tout x de I
$\frac{u'}{u}$	$\ln u $	pour $u(x) \neq 0$
$u'e^u$	e^u	
$(v' \circ u) \times u'$	$v \circ u$	v dérivable sur un intervalle J et, pour tout x de I , $u(x)$ appartient à J

Les méthodes – T° spé : Primitives

Vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle :

Soit l'équation différentielle $y' - 2y = 4$ pour x réel.

Montrer que la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{2x} - 2$ est une solution de cette équation.

Solution :

Calculons en premier lieu f' : $f'(x) = 2e^{2x}$.

Nous avons donc : $f'(x) - 2f(x) = 2e^{2x} - 2(e^{2x} - 2) = 2e^{2x} - 2e^{2x} + 4 = 4$.

f est donc bien une solution de l'équation différentielle $y' - 2y = 4$.

Vérifier qu'une fonction est une primitive d'une autre fonction :

Soit les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par $f(x) = xe^x$ et $g(x) = (x-1)e^x$.

a) Montrer que g est une primitive de f sur \mathbb{R} .

b) En déduire toutes les primitives de f sur \mathbb{R} .

Solution :

a) g est une primitive de f si $g'(x) = f(x)$. Nous calculons donc la dérivée de g :

g est de la forme $g(x) = u(x) \times v(x)$ avec $u(x) = (x-1)$ et $v(x) = e^x$.

Donc $g'(x) = 1e^x + (x-1)e^x = e^x + xe^x - e^x = xe^x = f(x)$.

g est bien une primitive de f .

b) On en déduit l'ensemble des primitives de f : $F(x) = g(x) + k = (x-1)e^x + k$

Calculs de primitives :

Calculer une primitive des fonctions suivantes :

a) $f(x) = x^2 - 4x + 9$ b) $g(x) = \frac{1}{x} - \frac{4}{x^3}$ c) $h(x) = 6x(x^2 - 1)^3$

d) $i(x) = \frac{5}{2x+3}$ e) $k(x) = 3e^{2x+1}$

Solution :

a) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 9x$

b) $g(x) = \frac{1}{x} - \frac{4}{x^3} = \frac{1}{x} - 4x^{-3}$, donc $G(x) = \ln(x) - 4 \times \frac{x^{-2}}{-2} = \ln(x) + 2x^{-2} = \ln(x) + \frac{2}{x^2}$

c) $h(x) = 6x(x^2 - 1)^3 = 3 \times 2x(x^2 - 1)^3$, donc h est de la forme $h(x) = 3u'u^3$. Nous avons ainsi :

$$H(x) = 3 \times \frac{(x^2 - 1)^4}{4} = \frac{3}{4}(x^2 - 1)^4$$

d) $i(x) = \frac{5}{2} \times \frac{2}{2x+3}$, donc i est de la forme $i(x) = \frac{5}{2} \times \frac{u'}{u}$. Nous avons ainsi :

$$I(x) = \frac{5}{2} \ln(|2x+3|)$$

e) $k(x) = 3e^{2x+1} = \frac{3}{2} \times 2e^{2x+1}$, donc k est de la forme $k(x) = \frac{3}{2} \times u'e^u$. Nous avons ainsi :

$$K(x) = \frac{3}{2} e^{2x+1}$$

Détermination de la constante :

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$. Déterminer la primitive F de f telle que $F(0) = 5$.

Solution :

f est de la forme $f(x) = \frac{u'}{u}$. L'ensemble des primitives de f sont donc : $F_k(x) = \ln(e^x+1) + k$ ($e^x+1 > 0$). Nous cherchons la primitive qui est telle que $F_k(0) = 5 \Leftrightarrow \ln(e^0+1) + k = 5 \Leftrightarrow \ln(2) + k = 5 \Leftrightarrow k = 5 - \ln(2)$. La primitive recherchée est donc :

$$F(x) = \ln(e^x+1) + 5 - \ln(2)$$

Autres méthodes, astuces, notions... rencontrées :

Le cours – T° spé : Droite dans l'espace

Représentation paramétrique de droite :

Soit une droite (d) passant par un point $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

On a : $M(x; y; z) \in (d) \Leftrightarrow$ Il existe un réel t tel que
$$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$$

Ce système s'appelle une **représentation paramétrique** de la droite (d) .

Les méthodes – T° spé : Droite dans l'espace

Utiliser les représentations paramétriques de droites :

On considère la droite (d) de représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = 5 - t \\ y = -1 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

a) Le point $A(3; 5; -2)$ appartient-il à la droite (d) ?

b) Donner les coordonnées de 2 points de (d) , ainsi que celles de 2 vecteurs directeurs de (d) .

c) (d) est-elle parallèle à la droite (d') de représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = 6 + 2k \\ y = 1 - 6k \\ z = -5 - 2k \end{cases}, \text{ avec } k \in \mathbb{R} ?$$

Solution :

a) Le point A appartient à (d) si, et seulement si, il existe un réel t tel que
$$\begin{cases} x_A = 5 - t \\ y_A = -1 + 3t \\ z_A = 1 + t \end{cases}$$
, ce qui équivaut à

$$\begin{cases} 3 = 5 - t \\ 5 = -1 + 3t \\ -2 = 1 + t \end{cases}, \text{ soit à } \begin{cases} t = 2 \\ t = 2 \\ t = -3 \end{cases}.$$
 Ceci implique qu'il n'existe pas de réel t vérifiant les trois équations : on en déduit que le point A n'appartient pas à la droite (d) .

b) Pour $t = 0$, on a le point $B(5; -1; 1)$. Pour $t = 1$, on a le point $C(4; 2; 2)$. Un vecteur directeur \vec{u}_1 a pour coordonnées $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Tout vecteur colinéaire à \vec{u}_1 est un vecteur directeur. Par exemple $\vec{u}_2 = 2\vec{u}_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

c) Un vecteur directeur de (d') a pour coordonnées $\vec{u}' \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$. On remarque que $\vec{u}' = -2\vec{u}_1$. Comme les vecteurs directeurs sont colinéaires, les deux droites sont parallèles.

Déterminer l'intersection de 2 droites :

On considère les droites (d) et (d') de représentations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 4 + 3t \end{cases}, \text{ avec } t \in \mathbb{R} \text{ et } \begin{cases} x = 1 - 3k \\ y = 1 + k \\ z = 2 - 5k \end{cases}, \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

Démontrer que ces deux droites sont sécantes en un point A dont on déterminera les coordonnées.

Solution :

Les deux droites ne sont pas parallèles car leurs vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires.

Les deux droites sont alors sécantes si, et seulement si, il existe un couple $(t; k)$ de réels solution du système

$$\begin{cases} 3 + 2t = 1 - 3k \\ -1 - t = 1 + k \\ 4 + 3t = 2 - 5k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t + 3k = -2 \\ -t - k = 2 \\ 3t + 5k = -2 \end{cases}.$$

Avec les deux premières équations, nous obtenons :

$$\begin{cases} 2t + 3k = -2 \\ -t - k = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t + 3k = -2 \\ -2t - 2k = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t + 3k = -2 \\ k = 2 \end{cases} \quad (L_2 = L_1 + L_2).$$

On vérifie si la dernière égalité est vérifiée par ces deux valeurs : $3t + 5k = 3 \times (-4) + 5 \times 2 = -2$ ce qui convient.

Les deux droites sont donc sécantes. Le point A est le point de (d) de paramètre -4 et le point de (d') de paramètre 2 .

$$\begin{cases} x_A = 3 + 2 \times (-4) \\ y_A = -1 - (-4) \\ z_A = 4 + 3 \times (-4) \end{cases} \text{ d'où } A(-5; 3; -8)$$

Démontrer que 2 droites sont non coplanaires :

On considère les droites (d) et (d') de représentations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 4 + 3t \end{cases}, \text{ avec } t \in \mathbb{R} \text{ et } \begin{cases} x = 1 - 3k \\ y = 1 + k \\ z = 3 - 5k \end{cases}, \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

Démontrer que ces deux droites sont non coplanaires.

Solution :

Les deux droites ne sont pas parallèles car leurs vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires.

Les deux droites sont alors sécantes si, et seulement si, il existe un couple $(t; k)$ de réels solution du système

$$\begin{cases} 3 + 2t = 1 - 3k \\ -1 - t = 1 + k \\ 4 + 3t = 3 - 5k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t + 3k = -2 \\ -t - k = 2 \\ 3t + 5k = -1 \end{cases}.$$

Avec les deux premières équations, nous obtenons :

$$\begin{cases} 2t + 3k = -2 \\ -t - k = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t + 3k = -2 \\ -2t - 2k = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t + 3k = -2 \\ k = 2 \end{cases} \quad (L_2 = L_1 + L_2).$$

On vérifie si la dernière égalité est vérifiée par ces deux valeurs : $3t + 5k = 3 \times (-4) + 5 \times 2 = -2 \neq -1$.

La dernière égalité n'est pas vérifiée. Les droites ne sont donc pas sécantes et en conséquence sont non coplanaires.

Autres méthodes, astuces, notions... rencontrées :

Le cours – T° spé : Loi binomiale

Prérequis : Proba conditionnelles, variables aléatoires, dénombrement

Épreuve de Bernoulli :

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire à **deux issues** que l'on peut nommer "**succès**" ou "**échec**".

Une **loi de Bernoulli** est une loi de probabilité qui suit le schéma suivant :

- la probabilité d'obtenir un succès est égale à p ,
 - la probabilité d'obtenir un échec est égale à $1 - p$.
- p est appelé le paramètre de la loi de Bernoulli.

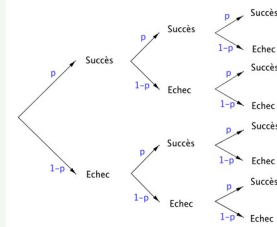
x_i	0	1
$P(X=x_i)$	$1-p$	p

La **variable aléatoire** qui prend la valeur **1** en cas de succès et **0** en cas d'échec est appelée variable aléatoire de Bernoulli.

Loi binomiale :

Un **schéma de Bernoulli** est la répétition de n épreuves de Bernoulli **identiques et indépendantes**.

Soit X une variable aléatoire qui, à chaque issue d'un schéma de Bernoulli de paramètres n et p , associe **le nombre de succès** au cours de ces n épreuves. La loi de probabilité de X est appelée **loi binomiale de paramètres n et p** . On la note $\mathcal{B}(n, p)$.



Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p . Alors, pour tout entier k compris entre 0 et n ,

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$E(X) = n \times p \quad V(X) = np(1-p) \quad \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$$

Calculatrice :

Taper sur **MENU** et choisir le menu **Statistique** et **DIST** puis **BINOMIAL**.

Calculer $P(X = k)$:

Pour calculer $P(X = 5)$ sélectionner **Bpd** puis dans **Data**, écrire Variable (ici 5), dans **Numtrial**, écrire n (ici 30) et dans **p** écrire p (ici 0,2).

Taper sur **EXE** pour obtenir : **D.P. binomiale p=0.17227918**

Calculer $P(X \leq k)$:

Pour calculer $P(X \leq 8)$, sélectionner **Bcd** puis dans **Lower**, écrire 0, dans **Upper**, écrire k (ici 8) dans **Numtrial**, écrire n (ici 30) et dans **p** écrire p (ici 0,2).

Taper sur **EXE** pour obtenir : **D.C. binomiale p=0.87134924**

Appuyer sur la touche **MENU**, sélectionner le menu **Table**, puis suivre les instructions suivantes :

1 Dans **Y1**, saisir **BinomialCD(X,15,0,3)** Suivi de **EXE**. L'instruction **BinomialCD** se trouve de la façon suivante : **OPTN** puis **F6** puis **STAT** puis **DIST** puis **BINOMIAL** et enfin **Bcd**.

2 Choisir **SET** puis entrer la première **Start** et la dernière valeur **End**: de k , ainsi que le pas, suivi de **EXE**.

3 Choisir **TABL** (touche **F6**).

4 Le début du tableau de valeurs s'affiche. On obtient la suite du tableau en appuyant sur la touche **↓** du pavé directionnel.

Remarque : pour un tableau des valeurs $P(X = k)$, on utilise l'instruction **BinomialPD(Bpd)**.

Les méthodes – T° spé : Loi binomiale

Calculs de probabilités avec la loi binomiale :

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,25$.

- 1) Calculer $P(X=0)$ et $P(X=7)$.
- 2) Calculer $P(X \leq 1)$ et $P(X \leq 6)$.
- 3) Calculer $P(X > 1)$ et $P(X \geq 4)$.
- 4) Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$.

Solution :

1) $P(X=0) = \binom{10}{0} 0,25^0 (1-0,25)^{10} = 0,75^{10} \approx 0,056$.

$P(X=7) = \binom{10}{7} 0,25^7 (0,75)^3 \approx 0,003$ avec la calculatrice : **BinomialPD(7,10,0,25)**

2) $P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) = \binom{10}{0} 0,25^0 (1-0,25)^{10} + \binom{10}{1} 0,25^1 (1-0,25)^9 \approx 0,244$.

$P(X \leq 6) \approx 0,996$ avec la calculatrice : **BinomialCD(6,10,0,25)**

3) $P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - (P(X=0) + P(X=1)) \approx 0,756$.

$P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) \approx 0,224$ avec la calculatrice : **1 - BinomialCD(3,10,0,25)**

4) $E(X) = n \times p = 10 \times 0,25 = 2,5$. $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{10 \times 0,25 \times 0,75} \approx 1,369$

Calcul d'un seuil :

On commande n casques d'une certaine marque. On assimile cette expérience à un tirage aléatoire avec remise. La probabilité qu'un casque présente un défaut de conception est 0,036. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de casques présentant un défaut de conception dans ce lot.

- 1) Justifier que X suit une loi binomiale et donner ses paramètres.
- 2) Quel doit être le nombre minimal de casques à commander pour que la probabilité qu'au moins un casque présente un défaut soit supérieur ou égale à 0,99 ?

Solution :

1) Il y a répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes (tirage avec remise). Le succès est "le casque a un défaut de conception" et sa probabilité est $p=0,036$. X est la variable aléatoire qui donne le nombre de casques présentant un défaut de conception dans le lot. Donc X suit bien une loi binomiale de paramètres n et $p=0,036$.

2) Nous cherchons n tel que $P(X \geq 1) \geq 0,99$.

$$P(X \geq 1) \geq 0,99$$

$$1 - P(X=0) \geq 0,99$$

$$-P(X=0) \geq -0,01$$

$$P(X=0) \leq 0,01$$

$$\binom{n}{0} 0,036^0 (1-0,036)^n \leq 0,01$$

$$0,964^n \leq 0,01$$

$$\ln(0,964^n) \leq \ln(0,01)$$

$$n \times \ln(0,964) \leq \ln(0,01)$$

$$n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,964)}$$

$n \geq 125,6$ donc $n \geq 126$. Il faut donc commander au minimum 126 casques

Détermination d'un seuil avec la calculatrice :

Dans une chaîne de production pharmaceutique, la proportion de gélules non commercialisables en sortie de chaîne est de 3%. On prélève un échantillon de 200 gélules. On note X la variable aléatoire qui associe le nombre de gélules non commercialisables parmi les 200.

- 1) Quelle est la loi suivie par X ?
- 2) Déterminer le plus petit entier b tel que : $P(X \leq b) \geq 0,9$.

Solution :

1) Il y a répétition de 200 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Le succès est "la gélule est non commercialisable" et sa probabilité est $p=0,03$. X est la variable aléatoire qui associe le nombre de gélules non commercialisables parmi les 200. Donc X suit une loi binomiale de paramètres $n=200$ et $p=0,03$.



2) Avec le menu table de la calculatrice, on obtient : (on tape dans Y1 : **BinomialCD(X,200,0.03)**)

$P(X \leq 7)$	0,746
$P(X \leq 8)$	0,850
$P(X \leq 9)$	0,919

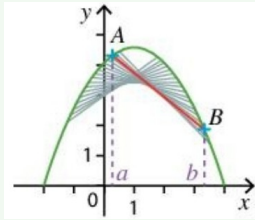
La valeur de b recherchée est donc $b = 9$

Autres méthodes, astuces, notions... rencontrées :

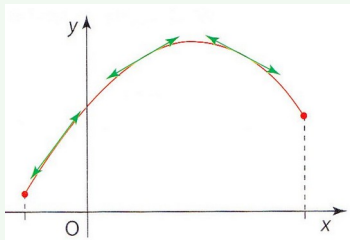
Fonction concave

Définition :

La fonction f est dite **concave** sur l'intervalle I si, pour tous réels a et b de I , la portion de la courbe située entre les points $A(a; f(a))$ $B(b; f(b))$ est **au-dessus de la sécante (AB)**.



La fonction f est dite **concave** sur l'intervalle I si sa courbe représentative est entièrement située **en-dessous de chacune de ses tangentes**.



Lien avec la fonction dérivée f' :

La fonction f est **concave** sur I si, et seulement si, sa fonction dérivée **f' est décroissante** sur I .

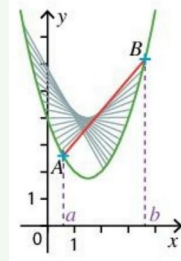
Lien avec la fonction dérivée seconde f'' :

La fonction f est **concave** sur I si, et seulement si, pour tout réel $x \in I$, **$f''(x) \leq 0$** .

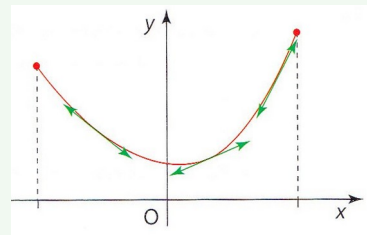
Fonction convexe

Définition :

La fonction f est dite **convexe** sur l'intervalle I si, pour tous réels a et b de I , la portion de la courbe située entre les points $A(a; f(a))$ $B(b; f(b))$ est **en-dessous de la sécante (AB)**.



La fonction f est dite **convexe** sur l'intervalle I si sa courbe représentative est entièrement située **au-dessus de chacune de ses tangentes**.



Lien avec la fonction dérivée f' :

La fonction f est **convexe** sur I si, et seulement si, sa fonction dérivée **f' est croissante** sur I .

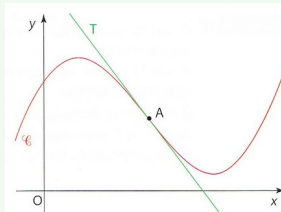
Lien avec la fonction dérivée seconde f'' :

La fonction f est **convexe** sur I si, et seulement si, pour tout réel $x \in I$, **$f''(x) \geq 0$** .

Point d'inflexion :

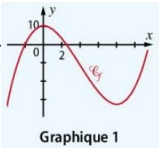
Un **point d'inflexion** d'une courbe est un point en lequel la courbe traverse la tangente.

Le point A d'abscisse a est un **point d'inflexion** de la courbe C_f si, et seulement si, la dérivée seconde **f'' s'annule en a en changeant de signe**.



Lecture graphique :

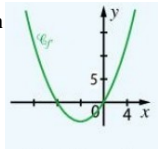
1) On donne sur le graphique 1 la courbe représentative d'une fonction f définie sur \mathbb{R} . Déterminer les intervalles sur lesquels la fonction f est convexe et les intervalles sur lesquels elle est concave.



Solution :

Par lecture graphique, f est concave sur $]-\infty; 4]$ et convexe sur $]4; +\infty[$.

2) On donne sur le graphique 2 la courbe représentative de la fonction dérivée d'une fonction f définie sur \mathbb{R} . Déterminer les intervalles sur lesquels la fonction f est convexe et concave.



Solution :

f est concave lorsque sa dérivée est décroissante soit sur l'intervalle $]-\infty; -4]$.
 f est convexe lorsque sa dérivée est croissante, soit sur l'intervalle $]-4; +\infty[$.

Étude de convexité :

1) On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^x$ et on note C_f sa courbe représentative.

- a) Étudier la convexité de f .
- b) Déterminer une équation de la tangente T à C_f en son point d'abscisse 0.
- c) En déduire que quel que soit le réel x : $e^x \geq x+1$

Solution :

- a) $f''(x) = f'(x) = e^x > 0$, donc f est convexe sur \mathbb{R} .
- b) $T: y = f'(0)(x-0) + f(0) \Leftrightarrow y = x+1$
- c) La fonction f est convexe sur \mathbb{R} . Sa courbe représentative est donc au-dessus de toutes ses tangentes sur \mathbb{R} . Elle est, en particulier, au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 0, d'où $e^x \geq x+1$

2) On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1+x}$ et on note C_f sa courbe représentative.

- a) Étudier la convexité de f .
- b) Déterminer une équation de la tangente T à C_f en son point d'abscisse 0.
- c) En déduire que quel que soit le réel x de $]0; +\infty[$: $\sqrt{1+x} \leq 1+0,5x$

Solution :

a) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$, et $f''(x) = -\frac{1}{4(1+x)\sqrt{1+x}}$
 Sur $]0; +\infty[$, $\sqrt{1+x} \geq 0$, $1+x \geq 0$, donc $f''(x) \leq 0$ et f est concave.

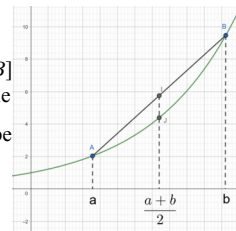
b) $T: y = f'(0)(x-0) + f(0) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x+1$

c) La fonction f est concave sur $]0; +\infty[$. Sa courbe représentative est donc en-dessous de toutes ses tangentes sur $]0; +\infty[$. Elle est, en particulier, en-dessous de sa tangente au point d'abscisse 0, d'où $\sqrt{1+x} \leq 1+0,5x$

3) En utilisant la convexité de la fonction exponentielle, démontrer que pour tout réels a et b : $e^{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{e^a + e^b}{2}$

Solution :

Soit les points $A(a; e^a)$ $B(b; e^b)$. La fonction exponentielle étant convexe, le segment $[AB]$ est situé au-dessus de la courbe représentative de la fonction exponentielle. En particulier, le milieu de ce segment de coordonnées $(\frac{a+b}{2}, \frac{e^a + e^b}{2})$ est au-dessus du point de la courbe ayant la même abscisse $(\frac{a+b}{2}; e^{\frac{a+b}{2}})$. On a donc $e^{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{e^a + e^b}{2}$.



Le cours – T° spé : Produit scalaire dans l'espace

Prérequis : Produit scalaire, droites et cercles, vecteurs dans l'espace, droites espace

Définition et propriétés :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}; \vec{v})$$

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \quad \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \quad (k \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k \vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v}), k \in \mathbb{R}$$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ équivaut à \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux (s'ils sont non nuls)

Autres propriétés du produit scalaire :

Expression analytique : Si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = x x' + y y' + z z'$

En particulier $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ et $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2) \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

L'application de la deuxième formule dans un triangle ABC donne la formule d'Al-Kashi :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$$

Équation de plan et positions relatives :

Un plan P de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ non nul admet une **équation cartésienne** de la forme $ax + by + cz + d = 0$

Un vecteur non nul \vec{n} de l'espace est **normal à un plan \mathcal{P}** s'il est orthogonal à **deux vecteurs non colinéaires** de \mathcal{P} .

Deux droites d_1 et d_2 de vecteurs directeurs respectifs \vec{u} et \vec{v} sont **orthogonales** si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

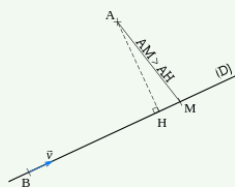
Positions droite-plan

Positions relatives	d et P sécants	d et P parallèles
- Droite d de vecteur directeur \vec{u} - Plan P de vecteur normal \vec{n}		
Vecteurs	\vec{u} et \vec{n} non orthogonaux	\vec{u} et \vec{n} orthogonaux
Produit scalaire	$\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0$	$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$

Positions plan-plan

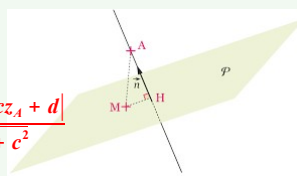
Positions relatives	P_1 et P_2 parallèles	P_1 et P_2 sécants
- Plan P_1 de vecteur normal \vec{n}_1 - Plan P_2 de vecteur normal \vec{n}_2		
Vecteurs	\vec{n}_1 et \vec{n}_2 colinéaires	\vec{n}_1 et \vec{n}_2 non colinéaires
		\vec{n}_1 et \vec{n}_2 orthogonaux $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$

Distance AH d'un point à une droite



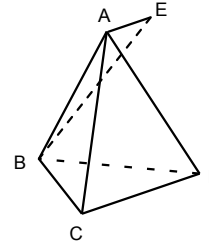
Distance AH d'un point à un plan

$$d(A, \text{Plan}) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$



Les méthodes – T° spé : Produit scalaire dans l'espace

Un exercice sans coordonnée :



Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier d'arête de longueur a et E le point défini par $\vec{AE} = \frac{1}{3}\vec{CD}$.

- 1) Calculer les produits scalaires $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ et $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$
- 2) Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{CD}$
- 3) En déduire que le triangle ABE est rectangle en A .
- 4) Calculer l'angle \widehat{AEB} au degré près.

Solution :

1) Le triangle ABC est un triangle équilatéral (comme le tétraèdre est régulier), donc nous savons que $\widehat{BAC} = 60^\circ$.

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\vec{AB}; \vec{AC}) = a \times a \times \cos(60) = \frac{a^2}{2}$$

De même, $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = \frac{a^2}{2}$.

$$2) \vec{AB} \cdot \vec{CD} = \vec{AB} \cdot (\vec{CA} + \vec{AD}) = \vec{AB} \cdot \vec{CA} + \vec{AB} \cdot \vec{AD} = -\vec{AB} \cdot \vec{AC} + \vec{AB} \cdot \vec{AD} = -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = 0.$$

3) Calculons $\vec{AB} \cdot \vec{AE}$:

$\vec{AB} \cdot \vec{AE} = \vec{AB} \cdot \left(\frac{1}{3}\vec{CD}\right) = \frac{1}{3}\vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0$ d'après la question précédente. Nous pouvons en conclure que les vecteurs \vec{AB} et \vec{AE} sont orthogonaux et ainsi que le triangle ABE est rectangle en A .

4) Dans le triangle ABE rectangle en A , $\tan(\widehat{AEB}) = \frac{AB}{AE} = \frac{a}{\frac{1}{3}a} = 3$. Nous avons donc $\widehat{AEB} \approx 72^\circ$

Ne pas oublier de mettre la calculatrice en degré dans SET UP.

Équation cartésienne de plan :

1) Soit $A(-1; 2; 5)$ et $B(3; 8; 7)$ deux points de l'espace et $\vec{n} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ un vecteur.

- a) Déterminer une équation du plan \mathcal{P} passant par A et de vecteur normal \vec{n} .
- b) Déterminer une équation du plan médiateur \mathcal{P}' du segment $[AB]$.

Solution :

a) \vec{n} est un vecteur normal à \mathcal{P} , donc l'équation cartésienne de \mathcal{P} est de la forme : $-3x + y + 4z + d = 0$.

De plus, $A \in \mathcal{P}$, donc $-3 \times (-1) + 2 + 4 \times 5 + d = 0$ et ainsi $d = -25$.

L'équation cartésienne de \mathcal{P} est donc : $-3x + y + 4z - 25 = 0$.

b) \mathcal{P}' est le plan médiateur de $[AB]$. \vec{AB} est donc un vecteur normal à \mathcal{P}' . Les coordonnées de \vec{AB} sont $\vec{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Nous prendrons comme vecteur normal le vecteur $\frac{1}{2}\vec{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. L'équation cartésienne de \mathcal{P}' est donc de la forme :

$$2x + 3y + z + d = 0.$$

De plus, le milieu I de $[AB]$ appartient à \mathcal{P}' . I a pour coordonnées : $I(1; 5; 6)$. Ainsi, $2 \times 1 + 3 \times 5 + 6 + d = 0$ et $d = -23$.

L'équation cartésienne de \mathcal{P}' est donc : $2x + 3y + z - 23 = 0$.

1) Soit $A(1;0;3)$ et $B(2;2;7)$ et $C(-1;5;4)$ trois points de l'espace et \mathcal{P} le plan d'équation cartésienne $2x + y - z + 1 = 0$.

- a) Démontrer que les points A, B et C définissent un plan.
- b) Démontrer que \mathcal{P} est le plan (ABC) .
- c) En déduire un vecteur normal au plan (ABC) .

Solution :

a) 3 points définissent un plan s'ils ne sont pas alignés. Vérifions donc la non colinéarité des deux vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} :

$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Il n'existe aucun nombre réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k \overrightarrow{AC}$. Les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} ne sont donc pas

colinéaires et les points A, B et C non alignés. Ils définissent donc un plan (ABC) .

b) Le plan \mathcal{P} est le plan (ABC) si les trois points A, B et C appartiennent à \mathcal{P} . Vérifions donc si les coordonnées de A, B et C vérifient l'équation de \mathcal{P} :

$2 \times 1 + 0 - 3 + 1 = 2 - 3 + 1 = 0$, donc $A \in \mathcal{P}$.

$2 \times 2 + 2 - 7 + 1 = 4 + 2 - 7 + 1 = 0$, donc $B \in \mathcal{P}$.

$2 \times (-1) + 5 - 4 + 1 = -2 + 5 - 4 + 1 = 0$, donc $C \in \mathcal{P}$.

\mathcal{P} est donc le plan (ABC) .

c) Comme $2x + y - z + 1 = 0$ est l'équation cartésienne de (ABC) , un vecteur normal à (ABC) est $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Exercice type bac :

Dans l'espace, rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points :

$A(2; 0; 3), B(0; 2; 1), C(-1; -1; 2)$ et $D(3; -3; -1)$.

1. Calcul d'un angle

- a. Calculer les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} et en déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.
- b. Calculer les longueurs AB et AC .
- c. À l'aide du produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, déterminer la valeur du cosinus de l'angle \widehat{BAC} puis donner une valeur approchée de la mesure de l'angle \widehat{BAC} au dixième de degré.

2. Calcul d'une aire

- a. Déterminer une équation du plan \mathcal{P} passant par le point C et perpendiculaire à la droite (AB) .
- b. Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) .
- c. En déduire les coordonnées du projeté orthogonal E du point C sur la droite (AB) , c'est-à-dire du point d'intersection de la droite (AB) et du plan \mathcal{P} .
- d. Calculer l'aire du triangle ABC .

3. Calcul d'un volume

- a. Soit le point $F(1; -1; 3)$. Montrer que les points A, B, C et F sont coplanaires.
- b. Vérifier que la droite (FD) est orthogonale au plan (ABC) .
- c. Sachant que le volume d'un tétraèdre est égal au tiers de l'aire de sa base multiplié par sa hauteur, calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.

Solution :

1. Calcul d'un angle

a. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$; or ces coordonnées ne sont pas proportionnelles $\frac{-2}{-3} \neq \frac{2}{-1} \neq \frac{-2}{-1}$,

donc il n'existe pas de réel $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AB} = \alpha \overrightarrow{AC}$: ces vecteurs ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

b. • $AB^2 = 4 + 4 + 4 = 3 \times 4$, donc $AB = 2\sqrt{3}$:

• $AC^2 = 9 + 1 + 1 = 11$, donc $AC = \sqrt{11}$.

c. • D'une part $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6 - 2 + 2 = 6$;

• D'autre part $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$.

On a donc $6 = 2\sqrt{3} \times \sqrt{11} \times \cos \widehat{BAC} \iff \cos \widehat{BAC} = \frac{6}{2\sqrt{3} \times \sqrt{11}} = \frac{3}{\sqrt{33}}$.

La calculatrice donne $\widehat{BAC} \approx 58,51$, soit $58,5^\circ$ au dixième près.

2. Calcul d'une aire

a. Soit $M(x; y; z)$ un point de \mathcal{P} . On a $M(x; y; z) \in \mathcal{P} \iff \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

Avec $\overrightarrow{CM} \begin{pmatrix} x+1 \\ y+1 \\ z-2 \end{pmatrix}$, on obtient :

$-2(x+1) + 2(y+1) - 2(z-2) = 0 \iff -(x+1) + (y+1) - (z-2) = 0 \iff -x + y - z + 2 = 0$.

Méthode différente de celle vue en cours mais équivalente !

b. En prenant le vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ comme vecteur directeur de la droite (AB) , soit $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ on

a :

$M(x; y; z) \in (AB) \iff \overrightarrow{AM} = t \times \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \iff \begin{cases} x-2 = t \times (-1) \\ y-0 = t \times 1 \\ z-3 = t \times (-1) \end{cases}, t \in \mathbb{R} \iff$

$\begin{cases} x = 2-t \\ y = t \\ z = 3-t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

c. E projeté orthogonal de C sur (AB) appartient au plan \mathcal{P} et à la droite (AB) ; ses coordonnées vérifient donc l'équation de \mathcal{P} et les équations paramétriques de (AB) , donc le système :

$\begin{cases} -x + y - z + 2 = 0 \\ x = 2-t \\ y = t \\ z = 3-t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$; en remplaçant x, y et z par leurs expressions en fonction de t dans l'équation de \mathcal{P} on obtient :

$-2 + t + t - 3 + t + 2 = 0 \iff 3t - 3 = 0 \iff t = 1$.

On a donc $E(1; 1; 2)$.

d. On a $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, d'où $BC^2 = 1 + 9 + 1 = 11$ et $BC = \sqrt{11}$.

Comme $AC = BC = \sqrt{11}$, le triangle ABC est isocèle en C; or on a vu que E est le projeté de C sur la droite (AB), donc dans le triangle isocèle (ABC), [CE] est la hauteur relative à la base [AB].

On a $\overrightarrow{CE} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, d'où $CE^2 = 1 + 4 = 8$ et $CE = 2\sqrt{2}$.

L'aire du triangle (ABC) est donc égale à :

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{AB \times CE}{2} = \frac{2\sqrt{3} \times 2\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{6}.$$

3. Calcul d'un volume

a. $F \in (ABC) \iff$ il existe $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}$, tels que : $\overrightarrow{AF} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC} \iff$

$$\begin{cases} -1 &= -2\alpha - 3\beta \\ -1 &= 2\alpha - \beta \\ 0 &= -2\alpha - \beta \end{cases} \text{ . En ajoutant membre à membre les deux dernières équations on}$$

obtient $-1 = -2\beta \iff \beta = \frac{1}{2}$ et en remplaçant β par $\frac{1}{2}$ dans la première équation $-1 =$

$$-2\alpha + \frac{3}{2} \iff 2\alpha = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \iff \alpha = -\frac{1}{4}.$$

Donc $\overrightarrow{AF} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$: les quatre points A, B, C et F sont coplanaires.

b. Avec $\overrightarrow{FD} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$, on peut calculer :

$$\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{AB} = -2 - 2 + 4 = 0 \text{ et}$$

$$\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{AC} = -6 + 2 + 4 = 0.$$

Le vecteur \overrightarrow{FD} est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) : il est donc orthogonal à ce plan, ou encore la droite (FD) est orthogonale au plan (ABC).

c. Si l'on choisit comme base le triangle (ABC), la hauteur de ce tétraèdre est donc [FD] et la volume est égal à :

$$\mathcal{V}(ABCD) = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}(ABC) \times FD$$

Autres méthodes, astuces, notions... rencontrées :

Le cours – T° spé : Opérations sur les variables aléatoires

Prérequis : Variables aléatoires

Opérations sur une variable aléatoire :

Soit X une variable aléatoire. On note $x_1; x_2; x_3; \dots; x_n$ les valeurs prises par X .

La variable aléatoire Y définie par $Y = aX + b$ prend pour valeurs les réels $y_i = ax_i + b$.

$$E(Y) = E(aX + b) = aE(X) + b \quad V(Y) = V(aX + b) = a^2 V(X) \quad \sigma(Y) = a \times \sigma(X)$$

Cas particuliers :

$$E(aX) = aE(X) \quad V(aX) = a^2 V(X) \quad \sigma(aX) = a \times \sigma(X)$$

$$E(X + b) = E(X) + b \quad V(X + b) = V(X) \quad \sigma(X + b) = \sigma(X)$$

Somme de variables aléatoires :

Lorsque X et Y sont deux variables aléatoires, $X + Y$ est la variable aléatoire qui prend pour valeurs les sommes des valeurs possibles de X et de Y .

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

Si X et Y sont **indépendantes**, alors :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

Somme et moyenne d'un échantillon :

Un échantillon de taille n d'une loi de probabilité est une liste $(X_1; X_2; X_3; \dots; X_n)$ de n variables aléatoires **indépendantes et identiques** qui suivent toutes cette loi.

La **somme de cet échantillon** est la variable aléatoire $S_n = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n$.

$$E(S_n) = E(X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + \dots + E(X_n) = nE(X)$$

$$V(S_n) = V(X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) + \dots + V(X_n) = nV(X)$$

$$\sigma(S_n) = \sqrt{n} \times \sigma(X)$$

La **moyenne de cet échantillon** est la variable aléatoire $M_n = \frac{S_n}{n} = \frac{1}{n} \times S_n$.

$$E(M_n) = \frac{nE(X)}{n} = E(X)$$

$$V(M_n) = \frac{nV(X)}{n^2} = \frac{V(X)}{n}$$

$$\sigma(M_n) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$$

Les méthodes – T° spé : Opérations sur les variables aléatoires

Loi d'une somme de deux VA :

Une urne contient trois jetons rouges marqués « 0 » et deux jetons bleus marqués « 1 ». On tire au hasard deux jetons de l'urne. Soit X la variable aléatoire qui, au premier tirage, associe le numéro du jeton tiré, et Y la variable aléatoire qui, au second tirage, associe le numéro du jeton tiré. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $Z = X + Y$ si le tirage du second jeton :

a) se fait avec remise

b) se fait sans remise.

Solution :

X et Y prennent les valeurs 0 et 1, donc Z prend les valeurs 0, 1 et 2.

On a $P(X=0) = \frac{3}{5} = 0,6$ et $P(X=1) = 0,4$.

a) Dans le cas d'un tirage avec remise :

$P(Y=0) = 0,6$ et $P(Y=1) = 0,4$

$$P(Z=0) = P(X=0 \text{ et } Y=0) = 0,6 \times 0,6 = 0,36$$

$$P(Z=2) = P(X=1 \text{ et } Y=1) = 0,4 \times 0,4 = 0,16$$

On en déduit

$$P(Z=1) = 1 - (P(Z=0) + P(Z=2)) = 1 - 0,36 - 0,16 = 0,48$$

z_i	0	1	2
$P(Z=z_i)$	0,36	0,48	0,16

b) Dans le cas d'un tirage sans remise :

$$P_{X=0}(Y=0) = \frac{2}{4} = 0,5; \quad P_{X=0}(Y=1) = \frac{2}{4} = 0,5; \quad P_{X=1}(Y=0) = \frac{3}{4} = 0,75; \quad P_{X=1}(Y=1) = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$P(Z=0) = P(X=0 \text{ et } Y=0) = 0,6 \times 0,5 = 0,3$$

$$P(Z=2) = P(X=1 \text{ et } Y=1) = 0,4 \times 0,25 = 0,1$$

On en déduit

$$P(Z=1) = 1 - (P(Z=0) + P(Z=2)) = 1 - 0,3 - 0,1 = 0,6$$

z_i	0	1	2
$P(Z=z_i)$	0,3	0,6	0,1

Calculer l'espérance d'une variable aléatoire :

Une entreprise fabrique des machines. Soit X la variable aléatoire qui, pour un mois choisi au hasard, associe le nombre de machines vendues pendant cette période. Une étude statistique permet d'établir la loi de probabilité de X .

x_i	0	1	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	0,04	0,08	0,12	0,28	0,25	0,17	0,06

a) Calculer l'espérance de X .

b) La vente d'une machine rapporte 5000 €. On note Y la variable aléatoire qui, à un mois tiré au hasard, associe le résultat en euros de l'atelier. Déterminer l'espérance de Y , puis l'interpréter.

c) Le résultat mensuel, en euros, du second atelier de l'entreprise définit une variable aléatoire T d'espérance 20000. Quelle est l'espérance du résultat mensuel total de l'entreprise ?

Solution :

$$a) E(X) = \sum_{i=1}^{i=7} (x_i \times P(X=x_i)) = 3,37$$

b) On a $Y = 5000X$, donc $E(Y) = 5000 E(X) = 5000 \times 3,37 = 16850$. Le résultat mensuel moyen de cet atelier peut donc être estimé à 16850€.

c) $E(Y+T) = E(Y) + E(T) = 36850$. L'espérance du résultat mensuel de l'entreprise est 36850€.

Somme de variables aléatoires :

On étudie la marche aléatoire d'une particule se déplaçant sur les points d'abscisses entières d'un axe gradué d'origine O. La particule est à l'origine au temps 0 et se déplace à chaque unité de temps d'une unité sur la droite avec la probabilité $\frac{1}{2}$ ou d'une unité vers la gauche avec la probabilité $\frac{1}{2}$.

On suppose les déplacements de la particule indépendants les uns des autres. Pour tout entier naturel k , on note X_k , la variable aléatoire qui vaut 1 si le k -ième déplacement a lieu vers la droite et qui vaut -1 dans le cas contraire. Pour tout entier naturel n non nul, on note S_n l'abscisse de la particule à l'instant n .

- a) Donner, pour tout entier naturel k non nul, l'espérance et la variance de X_k .
 b) Pour tout entier naturel n non nul, exprimer S_n en fonction des variables X_k .
 c) En déduire l'espérance et la variance de S_n .

Solution :

a) $E(X_k) = 1 \times \frac{1}{2} + (-1) \times \frac{1}{2} = 0$ $V(X_k) = (1-0)^2 \times \frac{1}{2} + (-1-0)^2 \times \frac{1}{2} = 1$

b) La particule est à l'origine au départ, donc son abscisse est la somme des X_k de 1 à n : $S_n = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n$.

c) $E(S_n) = E(X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + \dots + E(X_n) = nE(X) = 0$
 $V(S_n) = V(X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) + \dots + V(X_n) = nV(X) = n$

Moyenne d'un échantillon :

Une étude statistique a été réalisée sur le temps d'attente, en secondes, subi par la clientèle avant d'être prise en communication avec un standardiste. La variable aléatoire T , qui associe à tout client son temps d'attente, a pour espérance 18 et pour écart-type 7. On estime que la probabilité qu'un client ait une attente de plus de 20 secondes est égale à 0,4.

- a) Au cours d'une même semaine, un même client passe cinq appels, indépendants les uns des autres. On note X la variable aléatoire exprimant le nombre de fois où, au cours de ces cinq appels, le temps d'attente est supérieur à 20 secondes. Déterminer l'espérance et l'écart-type de X .
 b) Dans le but de diminuer le temps d'attente, on effectue une enquête sur un échantillon de 100 clients. Soit Y la variable aléatoire mesurant le temps d'attente moyen exprimé en secondes pour un échantillon de 100 clients. Déterminer l'espérance et l'écart-type de Y .

Solution :

a) Il y a répétition de 5 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Le succès est "le client a une attente de plus de 20 secondes" et sa probabilité est $p=0,4$. X est la variable aléatoire exprimant le nombre de fois où, au cours de ces cinq appels, le temps d'attente est supérieur à 20 secondes. Donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p=0,4$.

On a donc :

$$E(X) = n \times p = 5 \times 0,4 = 2 \text{ et } \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{5 \times 0,4 \times 0,6} \approx 1,1.$$

b) Y est la variable aléatoire mesurant le temps moyen. On a donc $E(Y) = E(T) = 18$ et $\sigma(Y) = \frac{\sigma(T)}{\sqrt{100}} = 0,7$

Le cours – T° spé : Équations différentielles

Prérequis : [Primitives](#)

$y' = ay$:

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ est l'ensemble des fonctions $x \mapsto C e^{ax}$, où C est une constante réelle quelconque.

$y' = ay + b$:

L'ensemble des solutions dans \mathbb{R} de l'équation différentielle $y' = ay + b$ est l'ensemble des fonctions $x \mapsto C e^{ax} - \frac{b}{a}$, où C est une constante réelle quelconque.

$y' = ay + f$:

Soit a un réel et f une fonction définie sur un intervalle I .

Toute solution dans I de l'équation différentielle (E) $y' = ay + f$ est la somme d'une **solution quelconque de l'équation $y' = ay$** et d'une **solution particulière** de l'équation (E).

Les méthodes – T° spé : Équations différentielles

Résolution d'une équation différentielle de la forme $y' = ay$:

- 1) Résoudre l'équation différentielle (E) $y' = -4y$.
- 2) Déterminer la solution f de (E) telle que $f(2) = 1$.

Solution :

- 1) Les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions $x \mapsto C e^{-4x}$.
- 2) Nous cherchons C telle que $C e^{-4 \times 2} = 1$ qui donne $C = e^8$. La solution recherchée est donc la fonction $f(x) = e^8 \times e^{-4x} = e^{-4x+8}$.

Résoudre une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$:

- 1) Résoudre l'équation différentielle (E) $y' = 3y - 2$.
- 2) Déterminer la solution f de (E) telle que $f(1) = 0$.

Solution :

- 1) Les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions $x \mapsto C e^{3x} - \frac{-2}{3}$ soit $x \mapsto C e^{3x} + \frac{2}{3}$.
- 2) Nous cherchons C telle que $C e^{3 \times 1} + \frac{2}{3} = 0$ qui donne $C = -\frac{2}{3} e^{-3}$. La solution recherchée est donc la fonction $f(x) = -\frac{2}{3} e^{-3} \times e^{3x} + \frac{2}{3} = \frac{2}{3} (1 - e^{3x-3})$.

Résoudre une équation différentielle de la forme $y' = ay + f$:

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}x$.

- 1) Vérifier que la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = -x - 2$ est solution de l'équation (E).
- 2) En déduire toutes les solutions de l'équation (E) sur \mathbb{R} .
- 3) En déduire l'unique solution h de (E) telle que $h(2) = 0$.

Solution :

1) Vérifions que g est solution : $g' - \frac{1}{2}g = -1 - \frac{1}{2}(-x-2) = -1 + \frac{1}{2}x + 1 = \frac{1}{2}x$. La fonction g est solution de (E).

2) L'équation (E) s'écrit $y' = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}x$. Les solutions de l'équation différentielle $y' = \frac{1}{2}y$ sont les fonctions $x \mapsto C e^{\frac{1}{2}x}$. De plus nous savons que g est une solution particulière de (E). Nous en déduisons que les solutions de (E) sont les fonctions $x \mapsto C e^{\frac{1}{2}x} - x - 2$.

3) Nous cherchons C telle que : $C e^{\frac{1}{2} \times 2} - 2 - 2 = 0$ qui donne $C = \frac{4}{e}$. La solution recherchée est donc la fonction $h(x) = \frac{4}{e} e^{\frac{1}{2}x} - x - 2 = 4 e^{\frac{1}{2}x-1} - x - 2$

Autres méthodes, astuces, notions... rencontrées :

Le cours – T° spé : Trigonométrie

Prérequis : [Trigonométrie première](#)

Propriétés des fonctions cosinus et sinus

Les fonctions cosinus et sinus sont **continues** et **dérivables** sur \mathbb{R} .

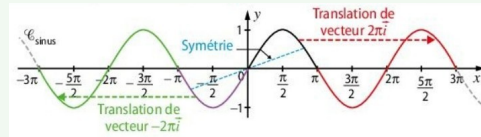
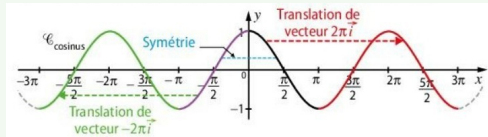
$$\cos'(x) = -\sin(x) \text{ et } \sin'(x) = \cos(x)$$

Les fonctions cosinus et sinus sont **périodiques** de période 2π : $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$.

La fonction cosinus est **paire** et la fonction sinus est **impaire** : $\cos(-x) = \cos(x)$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$.

x	0	π
$\cos(x)$	1	-1

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin(x)$	0	1	0



Fonctions composées

$$[\cos(u)]' = -u' \times \sin(u) \text{ et } [\sin(u)]' = u' \times \cos(u)$$

Limites

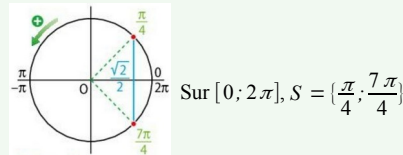
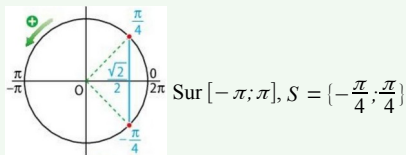
Les fonctions cosinus et sinus n'ont pas de limite en $-\infty$ et $+\infty$.

Limites particulières : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0$

Équations et inéquations

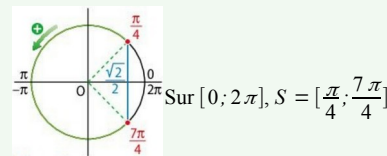
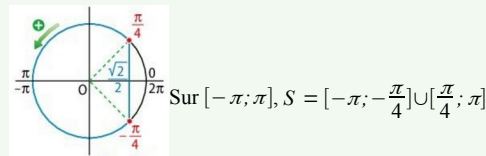
Résolution de l'**équation** $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ dans l'intervalle $[-\pi; \pi]$, puis dans l'intervalle $[0; 2\pi]$:

On place les points du cercle trigonométrique d'abscisse $\frac{\sqrt{2}}{2}$, puis on repère les réels auxquels sont associés ces points



Résolution de l'**inéquation** $\cos(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ dans l'intervalle $[-\pi; \pi]$, puis dans l'intervalle $[0; 2\pi]$:

On colore les points du cercle trigonométrique associés à un réel dont le cosinus est inférieur ou égal à $\frac{\sqrt{2}}{2}$



Formules de trigo :

$$\begin{aligned} \cos(\pi+x) &= -\cos(x) \text{ et } \sin(\pi+x) = -\sin(x) \\ \cos(\pi-x) &= -\cos(x) \text{ et } \sin(\pi-x) = \sin(x) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) &= -\sin(x) \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos(x) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) &= \sin(x) \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos(x) \end{aligned}$$

Formulaire Pour le supérieur :

(1) $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$; (2) $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$;

(3) $\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1$;

(4) $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$; (5) $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$

(6) $1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$; (7) $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$

(8) $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$; (9) $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

(10) $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$; (11) $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

(12) $\sin a \cos b = \frac{1}{2} (\sin(a+b) + \sin(a-b))$;

(13) $\cos a \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b))$;

(14) $\sin a \sin b = \frac{1}{2} (\cos(a-b) - \cos(a+b))$;

(15) $\sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$;

(16) $\sin p - \sin q = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$;

(17) $\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$;

(18) $\cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \sin\left(\frac{p+q}{2}\right)$;

(19) $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$; (20) $\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$;

(21) $\tan(2a) = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$;

(22) $(\tan)'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$;

Le cours – T° spé : Intégrales

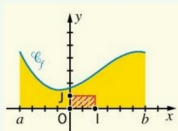
Prérequis : [Primitives](#)

Définition :

Si f est **positive** sur l'intervalle $[a; b]$, on appelle **intégrale de f sur $[a; b]$** l'aire, exprimée en u.a., de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Cette aire est également appelée « **aire sous la courbe** ». L'intégrale de la fonction f sur $[a; b]$ se

$$\text{note : } \int_a^b f(x) dx$$



Théorème fondamental :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$.

La fonction F définie sur $[a; b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est dérivable sur $[a; b]$ et sa dérivée est la fonction f .

Calcul d'une intégrale :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , a et b deux réels de I et F une primitive de f sur $[a; b]$. Alors,

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Propriétés :

$$\int_a^a f(x) dx = F(a) - F(a) = 0 \quad \int_b^a f(x) dx = F(a) - F(b) = -(F(b) - F(a)) = -\int_a^b f(x) dx$$

$$\text{Relation de Chasles : } \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

$$\text{Linéarité : } \int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \quad \text{et} \quad \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

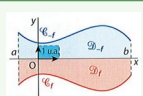
Positivité et comparaison :

$$\text{Si pour tout } x \text{ de } [a; b], f(x) \geq 0 \text{ alors } \int_a^b f(x) dx \geq 0$$

$$\text{Si pour tout } x \text{ de } [a; b], f(x) \geq g(x) \text{ alors } \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

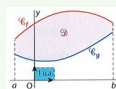
Calculs d'aires :

Aire d'une fonction continue **négative** : si f est **négative** sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(x) dx = -\text{aire}(D_f)$.



Aire d'un domaine **entre deux courbes** : Si \mathcal{C}_f est **au dessus** de \mathcal{C}_g sur $[a; b]$, alors l'aire du domaine D

délimité par \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g sur $[a; b]$ est $\text{aire}(D) = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$.



Valeur moyenne :

$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Intégration par parties :

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I , et dont les dérivées sont continues sur I ; a et b deux réels de I .

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$$

Les méthodes – T° spé : Intégrales

Étudier une fonction définie par une intégrale (théorème fondamental) :

Soit F la fonction définie sur $[-2; +\infty[$ par $F(x) = \int_{-2}^x \sqrt{t+2} dt$.

- 1) Donner une interprétation graphique de $F(2)$ et $F(3)$, puis conjecturer la comparaison de ces deux nombres.
- 2) Déterminer la dérivée de la fonction F sur $[-2; +\infty[$.
- 3) Étudier le sens de variation de F sur $[-2; +\infty[$ puis valider la conjecture du 1).

Solution :

1) La fonction $f(x) = \sqrt{x+2}$ est positive sur $[-2; +\infty[$. $F(2) = \int_{-2}^2 \sqrt{t+2} dt$ représente donc l'aire délimitée par la

courbe représentative de f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -2$ et $x = 2$. $F(3) = \int_{-2}^3 \sqrt{t+2} dt$ représente donc l'aire délimitée par la courbe représentative de f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -2$ et $x = 3$. Nous pouvons donc conjecturer que $F(3) \geq F(2)$.

2) D'après le théorème fondamental, $F'(x) = f(x) = \sqrt{x+2}$.

3) Nous savons que sur $[-2; +\infty[$, $\sqrt{x+2} \geq 0$, donc $F'(x) \geq 0$. La fonction F est donc croissante. Nous avons donc bien $F(3) \geq F(2)$.

Calculer une intégrale avec les primitives :

Calculer $I = \int_{-1}^0 e^{3x+1} dx$.

Solution :

$f(x) = e^{3x+1}$ admet pour primitive $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x+1}$. Nous avons donc :

$$I = \int_{-1}^0 e^{3x+1} dx = \left[\frac{1}{3}e^{3x+1} \right]_{-1}^0 = \frac{1}{3}e^{3 \times 0 + 1} - \frac{1}{3}e^{3 \times (-1) + 1} = \frac{1}{3}e - \frac{1}{3}e^{-2} = \frac{1}{3}(e - e^{-2})$$

Comparer deux intégrales :

- 1) Démontrer que, pour tout réel x de $[0; 1]$, $0 \leq e^{-x^2} \leq e^x$.
- 2) En déduire que $0 \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq e - 1$.

Solution :

1) Sur l'intervalle $[0; 1]$, nous avons : $0 \leq x^2 \leq x$ et donc $0 \leq e^0 \leq e^{-x^2} \leq e^x$.

2) Nous savons que $0 \leq e^{x^2} \leq e^x$. En intégrant chaque terme entre 0 et 1, nous obtenons : $\int_0^1 0 dx \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq \int_0^1 e^x dx$. Or $\int_0^1 0 dx = 0$ et $\int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e - 1$. Ainsi, $0 \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq e - 1$.

Calculer une intégrale en utilisant une IPP :

Calculer $I = \int_0^{\ln 2} (x-1)e^x dx$.

Solution :

On pose $u(x) = x-1$ et $v'(x) = e^x$. Nous avons donc $u'(x) = 1$ et $v(x) = e^x$. Nous obtenons donc par IPP :

$$I = \int_0^{\ln 2} (x-1)e^x dx = [(x-1) \times e^x]_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2} e^x dx = [(x-1) \times e^x]_0^{\ln 2} - [e^x]_0^{\ln 2} = (\ln 2 - 1) \times 2 - (-1) - (2 - 1) = 2 \ln 2 - 2 + 1 - 1 = 2 \ln 2 - 2$$

Calculer l'aire entre deux courbes :

Soit f et g les fonctions définies sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^3$ dont les courbes représentatives dans un repère orthonormé sont notées \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .

- 1) Préciser la position relative des courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g sur l'intervalle $[0; 1]$.
- 2) Calculer l'aire, en u.a., de la surface délimitée par \mathcal{C}_f , \mathcal{C}_g et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Solution :

1) $f(x) - g(x) = x^2 - x^3 = x^2(1-x) \geq 0$ sur $[0; 1]$. Donc \mathcal{C}_f est au dessus de \mathcal{C}_g sur $[0; 1]$.

2) $\mathcal{A} = \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 x^3 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 - \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ u.a.

Calculer la valeur moyenne d'une fonction :

Lors d'une épidémie de grippe, le nombre de malades, t jours après l'apparition des premiers cas, est modélisé par la fonction f définie sur $[0; 6]$ par $f(t) = 6t^2 - t^3$.

Calculer la valeur moyenne m de la fonction f sur l'intervalle $[0; 6]$. Interpréter ce résultat.

Solution :

$m = \frac{1}{6-0} \int_0^6 6t^2 - t^3 dt = \frac{1}{6} \times \left[2t^3 - \frac{t^4}{4} \right]_0^6 = \frac{1}{6} \times \left(2 \times 6^3 - \frac{6^4}{4} \right) = 18$. Ce nombre correspond au nombre moyen de malade chaque jour.

Le cours – T° spé : Loi des grands nombres

Prérequis : Variables aléatoires

Inégalité de Markov:

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

La probabilité que X prenne des valeurs plus grandes que a est d'autant plus petite que a est grand.

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(|X - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}$$

La probabilité que les valeurs prises par X s'écartent d'au moins δ de l'espérance $E(X)$ est d'autant plus petite que δ est grand.

Loi des grands nombres :

Soit M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$. Pour tout réel strictement positif δ , on a :

$$P(|M_n - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{n \delta^2}$$

(inégalité de concentration)

Et donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|M_n - E(X)| \geq \delta) = 0$$

On dit que M_n converge en probabilité vers $E(X)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Ce résultat justifie la possibilité de **définir des probabilités en prenant pour valeurs approchées les fréquences** obtenues pour un grand nombre d'essais.

Les méthodes – T° spé : Loi des grands nombres

Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

On lance 3600 fois une pièce de monnaie non truquée. Soit X la variable aléatoire qui associe à cette expérience le nombre de Pile obtenus.

a) Écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev relative à la variable X .

b) Minorer la probabilité que le nombre d'apparitions de Pile soit strictement compris entre 1600 et 2000.

Solution :

a) Nous avons besoin de $E(X)$ et de $V(X)$ pour écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev.

X suit une loi binomiale de paramètres 3600 et 0,5. On a donc : $E(X) = 3600 \times 0,5 = 1800$ et $V(X) = 3600 \times 0,5 \times 0,5 = 900$.

On écrit alors l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev : $P(|X - 1800| \geq \delta) \leq \frac{900}{\delta^2}$ avec $\delta > 0$.

b) L'intervalle $]1600; 2000[$ est un intervalle centré sur 1800.

$X \in]1600; 2000[$ équivaut à $|X - 1800| < 200$.

Nous cherchons donc à minorer $P(|X - 1800| < 200) = 1 - P(|X - 1800| \geq 200)$.

D'après la question 1, avec $\delta = 200$, nous avons :

$$P(|X - 1800| \geq 200) \leq \frac{900}{200^2}$$

$$P(|X - 1800| \geq 200) \leq 0,0225$$

$$-P(|X - 1800| \geq 200) \geq -0,0225$$

$$1 - P(|X - 1800| \geq 200) \geq 1 - 0,0225$$

$$1 - P(|X - 1800| \geq 200) \geq 0,9775$$

$$P(|X - 1800| < 200) \geq 0,9775$$

La probabilité que le nombre d'apparitions de Pile soit strictement compris entre 1600 et 2000 est au moins de 0,9775.

Utiliser l'inégalité de concentration pour définir une taille d'échantillon :

On effectue n tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires. On note X la variable aléatoire qui, à un tirage donné, associe 1 si la boule tirée est rouge, et 0 sinon, et M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n de X .

a) Déterminer $E(X)$ et $V(X)$, puis écrire l'inégalité de concentration relative à M_n .

b) A partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à au moins 95 % que la proportion de boules rouges obtenues restera strictement comprise entre 0,35 et 0,45 ?

Solution :

a) X est une variable de Bernoulli de paramètre $\frac{2}{5} = 0,4$ donc $E(X) = 0,4$ et $V(X) = 0,4 \times 0,6 = 0,24$.

L'inégalité de concentration s'écrit : $P(|M_n - 0,4| \geq \delta) \leq \frac{0,24}{n \delta^2}$

b) L'intervalle $]0,35; 0,45[$ est un intervalle centré sur 0,4.

$M_n \in]0,35; 0,45[$ équivaut à $|M_n - 0,4| < 0,05$.

Nous cherchons n tel que :

$$P(|M_n - 0,4| < 0,05) \geq 0,95$$

$$-P(|M_n - 0,4| < 0,05) \leq -0,95$$

$$1 - P(|M_n - 0,4| < 0,05) \leq 1 - 0,95$$

$$1 - P(|M_n - 0,4| < 0,05) \leq 0,05$$

$$P(|M_n - 0,4| \geq 0,05) \leq 0,05$$

Il faut donc, d'après l'inégalité de concentration, que $\frac{0,24}{n 0,05^2} \leq 0,05$

$$\frac{n 0,05^2}{0,24} \geq \frac{1}{0,05}$$

$$n \geq \frac{0,24}{0,05^3}$$

$$n \geq 1920$$

Le nombre minimal de tirages doit être de 1920.