Le cours – T° spé : Trigonométrie

Prérequis : Trigonométrie première

Propriétés des fonctions cosinus et sinus

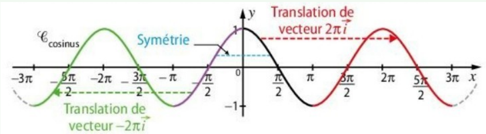
Les fonctions cosinus et sinus sont **continues** et **dérivables** sur ℝ.

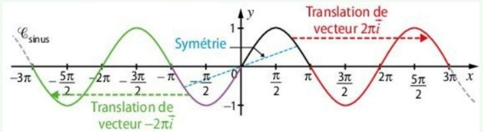
$$\cos'(x) = -\sin(x) \text{ et } \sin'(x) = \cos(x)$$

Les fonctions cosinus et sinus sont **périodiques** de période 2π : $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$.
La fonction cosinus est **paire** et la fonction sinus est **impaire** : $\cos(-x) = \cos(x)$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$.

x	0	π
$\cos(x)$	1 ↘	-1

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin(x)$	0 ↗	1 ↘	0





Fonctions composées

$$[\cos(u)]' = -u'\times\sin(u) \text{ et } [\sin(u)]' = u'\times\cos(u)$$

Limites

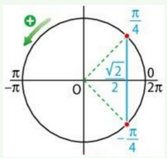
Les fonctions cosinus et sinus n'ont pas de limite en $-\infty$ et $+\infty$.

Limites particulières : $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$ $\qquad$ $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x} = 0$

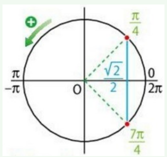
Équations et inéquations

Résolution de **l'équation** $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ dans l'intervalle $[-\pi;\pi]$, puis dans l'intervalle $[0;2\pi]$:

On place les points du cercle trigonométrique d'abscisse $\frac{\sqrt{2}}{2}$, puis on repère les réels auxquels sont associés ces points



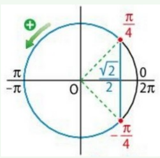
Sur $[-\pi;\pi]$, $S = \{-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\}$



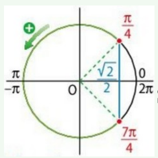
Sur $[0;2\pi]$, $S = \{\frac{\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\}$

Résolution de **l'inéquation** $\cos(x) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$ dans l'intervalle $[-\pi;\pi]$, puis dans l'intervalle $[0;2\pi]$:

On colore les points du cercle trigonométrique associés à un réel dont le cosinus est inférieur ou égal à $\frac{\sqrt{2}}{2}$



Sur $[-\pi;\pi]$, $S = [-\pi;-\frac{\pi}{4}]\cup[\frac{\pi}{4};\pi]$



Sur $[0;2\pi]$, $S = [\frac{\pi}{4};\frac{7\pi}{4}]$

Formules de trigo :

$\cos(\pi+x) = -\cos(x)$ et $\sin(\pi+x) = -\sin(x)$
$\cos(\pi-x) = -\cos(x)$ et $\sin(\pi-x) = \sin(x)$
$\cos(\frac{\pi}{2}+x) = -\sin(x)$ et $\sin(\frac{\pi}{2}+x) = \cos(x)$
$\cos(\frac{\pi}{2}-x) = \sin(x)$ et $\sin(\frac{\pi}{2}-x) = \cos(x)$

Formulaire Pour le supérieur :

(1) $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$; (2) $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$;

(3) $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$;

(4) $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$; (5) $\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$

(6) $1+\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$; (7) $1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$

(8) $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$; (9) $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$

(10) $\sin(a-b) = \sin a\cos b - \sin b\cos a$; (11) $\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$

(12) $\sin a\cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$;

(13) $\cos a\cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$;

(14) $\sin a\sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$;

(15) $\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$;

(16) $\sin p - \sin q = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$;

(17) $\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$;

(18) $\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)$;

(19) $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a.\tan b}$; (20) $\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a.\tan b}$;

(21) $\tan(2a) = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$;

(22) $(\tan)'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$;