Le cours – T° spé : Opérations sur les variables aléatoires

Prérequis : Variables aléatoires

Opérations sur une variable aléatoire :

Soit X une variable aléatoire. On note $x_1 ; x_2 ; x_3 ; \ldots ; x_n$ les valeurs prises par X.
La variable aléatoire Y définie par $Y = aX + b$ prend pour valeurs les réels $y_i = ax_i + b$.

$$E(Y) = E(aX+b) = a\,E(X)+b \qquad V(Y) = V(aX+b) = a^2\,V(X) \qquad \sigma(Y) = a\times\sigma(X)$$

Cas particuliers :

$$E(aX) = a\,E(X) \qquad V(aX) = a^2\,V(X) \qquad \sigma(aX) = a\times\sigma(X)$$

$$E(X+b) = E(X)+b \qquad V(X+b) = V(X) \qquad \sigma(X+b) = \sigma(X)$$

Somme de variables aléatoires :

Lorsque X et Y sont deux variables aléatoires, $X+Y$ est la variable aléatoire qui prend pour valeurs les sommes des valeurs possibles de X et de Y.

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

Si X et Y sont **indépendantes**, alors :

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$

Somme et moyenne d'un échantillon :

Un échantillon de taille n d'une loi de probabilité est une liste $(X_1 ; X_2 ; X_3 ; \ldots ; X_n)$ de n variables aléatoires **indépendantes et identiques** qui suivent toutes cette loi.

La **somme de cet échantillon** est la variable aléatoire $S_n = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n$.

$$E(S_n) = E(X_1+X_2+X_3+\ldots+X_n) = E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)+\ldots+E(X_n) = nE(X)$$
$$V(S_n) = V(X_1+X_2+X_3+\ldots+X_n) = V(X_1)+V(X_2)+V(X_3)+\ldots+V(X_n) = nV(X)$$
$$\sigma(S_n) = \sqrt{n}\times\sigma(X)$$

La **moyenne de cet échantillon** est la variable aléatoire $M_n = \frac{S_n}{n} = \frac{1}{n}\times S_n$.

$$E(M_n) = \frac{nE(X)}{n} = E(X)$$
$$V(M_n) = \frac{nV(X)}{n^2} = \frac{V(X)}{n}$$
$$\sigma(M_n) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$$

Les méthodes – T° spé : Opérations sur les variables aléatoires

Loi d'une somme de deux VA :

Une urne contient trois jetons rouges marqués « 0 » et deux jetons bleus marqués « 1 ». On tire au hasard deux jetons de l'urne. Soit X la variable aléatoire qui, au premier tirage, associe le numéro du jeton tiré, et Y la variable aléatoire qui, au second tirage, associe le numéro du jeton tiré. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $Z = X + Y$ si le tirage du second jeton :

a) se fait avec remise **b)** se fait sans remise.

Solution :

X et Y prennent les valeurs 0 et 1, donc Z prend les valeurs 0, 1 et 2.
On a $P(X=0) = \frac{3}{5} = 0{,}6$ et $P(X=1) = 0{,}4$.

a) Dans le cas d'un tirage avec remise :
$P(Y=0) = 0{,}6$ et $P(Y=1) = 0{,}4$

$P(Z=0) = P(X=0 \text{ et } Y=0) = 0{,}6\times 0{,}6 = 0{,}36$
$P(Z=2) = P(X=1 \text{ et } Y=1) = 0{,}4\times 0{,}4 = 0{,}16$
On en déduit
$P(Z=1) = 1-(P(Z=0)+P(Z=2)) = 1-0{,}36-0{,}16 = 0{,}48$

z_i	0	1	2
$P(Z=z_i)$	0,36	0,48	0,16

b) Dans le cas d'un tirage sans remise :
$P_{X=0}(Y=0) = \frac{2}{4} = 0{,}5$; $P_{X=0}(Y=1) = \frac{2}{4} = 0{,}5$; $P_{X=1}(Y=0) = \frac{3}{4} = 0{,}75$; $P_{X=1}(Y=1) = \frac{1}{4} = 0{,}25$

$P(Z=0) = P(X=0 \text{ et } Y=0) = 0{,}6\times 0{,}5 = 0{,}3$
$P(Z=2) = P(X=1 \text{ et } Y=1) = 0{,}4\times 0{,}25 = 0{,}1$
On en déduit
$P(Z=1) = 1-(P(Z=0)+P(Z=2)) = 1-0{,}3-0{,}1 = 0{,}6$

z_i	0	1	2
$P(Z=z_i)$	0,3	0,6	0,1

Calculer l'espérance d'une variable aléatoire :

Une entreprise fabrique des machines. Soit X la variable aléatoire qui, pour un mois choisi au hasard, associe le nombre de machines vendues pendant cette période. Une étude statistique permet d'établir la loi de probabilité de X.

x_i	0	1	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	0,04	0,08	0,12	0,28	0,25	0,17	0,06

a) Calculer l'espérance de X.
b) La vente d'une machine rapporte 5000 €. On note Y la variable aléatoire qui, à un mois tiré au hasard, associe le résultat en euros de l'atelier. Déterminer l'espérance de Y, puis l'interpréter.
c) Le résultat mensuel, en euros, du second atelier de l'entreprise définit une variable aléatoire T d'espérance 20000. Quelle est l'espérance du résultat mensuel total de l'entreprise ?

Solution :

a) $E(X) = \sum_{i=1}^{i=7}(x_i\times P(X=x_i)) = 3{,}37$
b) On a $Y = 5000X$, donc $E(Y) = 5000\,E(X) = 5000\times 3{,}37 = 16850$. Le résultat mensuel moyen de cet atelier peut donc être estimé à 16850€.
c) $E(Y+T) = E(Y)+E(T) = 36850$. L'espérance du résultat mensuel de l'entreprise est 36850€.

Somme de variables aléatoires :

On étudie la marche aléatoire d'une particule se déplaçant sur les points d'abscisses entières d'un axe gradué d'origine O. La particule est à l'origine au temps 0 et se déplace à chaque unité de temps d'une unité sur la droite avec la probabilité $\frac{1}{2}$ ou d'une unité vers la gauche avec la probabilité $\frac{1}{2}$.
On suppose les déplacements de la particule indépendants les uns des autres. Pour tout entier naturel k, on note X_k, la variable aléatoire qui vaut 1 si le k-ième déplacement a lieu vers la droite et qui vaut -1 dans le cas contraire.
Pour tout entier naturel n non nul, on note S_n l'abscisse de la particule à l'instant n.

a) Donner, pour tout entier naturel k non nul, l'espérance et la variance de X_k.
b) Pour tout entier naturel n non nul, exprimer S_n en fonction des variables X_k.
c) En déduire l'espérance et la variance de S_n.

Solution :

a) $E(X_k) = 1\times\frac{1}{2}+(-1)\times\frac{1}{2} = 0$ $\qquad V(X_k) = (1-0)^2\times\frac{1}{2}+(-1-0)^2\times\frac{1}{2} = 1$
b) La particule est à l'origine au départ, donc son abscisse est la somme des X_k de 1 à n : $S_n = X_1+X_2+X_3+...+X_n$.

c) $E(S_n) = E(X_1+X_2+X_3+...+X_n) = E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)+...+E(X_n) = nE(X) = 0$
$V(S_n) = V(X_1+X_2+X_3+...+X_n) = V(X_1)+V(X_2)+V(X_3)+...+V(X_n) = nV(X) = n$

Moyenne d'un échantillon :

Une étude statistique a été réalisée sur le temps d'attente, en secondes, subi par la clientèle avant d'être prise en communication avec un standardiste. La variable aléatoire T, qui associe à tout client son temps d'attente, a pour espérance 18 et pour écart-type 7. On estime que la probabilité qu'un client ait une attente de plus de 20 secondes est égale à 0,4.

a) Au cours d'une même semaine, un même client passe cinq appels, indépendants les uns des autres. On note X la variable aléatoire exprimant le nombre de fois où, au cours de ces cinq appels, le temps d'attente est supérieur à 20 secondes. Déterminer l'espérance et l'écart-type de X.
b) Dans le but de diminuer le temps d'attente, on effectue une enquête sur un échantillon de 100 clients. Soit Y la variable aléatoire mesurant le temps d'attente moyen exprimé en secondes pour un échantillon de 100 clients. Déterminer l'espérance et l'écart-type de Y.

Solution :

a) Il y a répétition de *5* épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Le succès est "le client a une attente de plus de 20 secondes" et sa probabilité est $p=0{,}4$. X est la variable aléatoire exprimant le nombre de fois où, au cours de ces cinq appels, le temps d'attente est supérieur à 20 secondes . Donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p=0{,}4$.
On a donc :
$E(X) = n\times p = 5\times0{,}4 = 2$ et $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{5\times0{,}4\times0{,}6} \approx 1{,}1$.

b) Y est la variable aléatoire mesurant le temps moyen. On a donc $E(Y) = E(T) = 18$ et $\sigma(Y) = \frac{\sigma(T)}{\sqrt{100}} = 0{,}7$