Le cours – T° spé : Vecteurs dans l'espace

Prérequis : Produit scalaire, droites et cercles

Vecteurs et colinéarité :

- Un **vecteur** de l'espace est défini par une **direction** de l'espace, un **sens** et une **norme** (longueur).
- $ABDC$ est un **parallélogramme** $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
- Deux vecteurs non nuls sont **colinéaires** si, et seulement si, ils ont **même direction**. Autrement dit, les vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\,\vec{v}$.
- Les point A, B et C sont **alignés** si, et seulement si, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires ($\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{AC}$).

Droite :

- 2 points **distincts** de l'espace définissent une **droite**.
- On appelle **vecteur directeur** d'une droite d tout vecteur non nul dont la direction est la même que celle de d.
- **Un point A et un vecteur $\vec{u}$** déterminent la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Plan, repère du plan :

- 3 points A, B et C définissent un plan **s'ils ne sont pas alignés**. Dans ces conditions, le triplet $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ est un **repère du plan**. Les vecteurs de l'espace $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont **non colinéaires**.
- **2 vecteurs**, comme **3 points** sont **toujours coplanaires**.
- Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires** si, et seulement si, il existe trois réels a, b et c non tous nuls tels que :

$$a\,\vec{u} + b\,\vec{v} + c\,\vec{w} = \vec{0}$$

- Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires** si, et seulement si, on peut exprimer l'un en fonction des deux autres :

$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$$

Repère de l'espace :

- 3 vecteurs (ou 4 points) sont **non coplanaires** s'il **n'existe pas** de nombres α et β tels que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.
- On appelle **base de l'espace** tout triplet $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ de vecteurs **non coplanaires**.
- On appelle **repère de l'espace** le quadruplet $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. O est appelé **l'origine du repère**.
- La décomposition $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ donne les **coordonnées** $(x;y;z)$ du point M.
- La décomposition $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ donne les **coordonnées** $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ du vecteur $\vec{u}$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$

Le milieu I de $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2};\dfrac{y_A + y_B}{2};\dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$

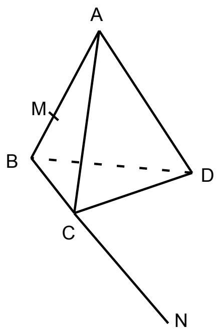
$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Positions relatives :

- Deux droites de l'espace sont soit **coplanaires** (dans un même plan) soit **non coplanaires** :
  - 2 droites **parallèles** sont **coplanaires**
  - 2 droites **sécantes** sont **coplanaires**
  - sinon les droites sont **non coplanaires**
- Deux plans de l'espace sont soit **sécants** soit **parallèles**.
- Une droite et un plan de l'espace sont soit **sécants** soit **parallèles**.
- Une droite d est parallèle à un plan P s'il existe une droite d' de P parallèle à d.
- Si un plan P contient deux droites sécantes d et d' parallèles à un plan P' alors les plans P et P' sont parallèles.
- Si deux plans sont parallèles alors tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre et leurs intersections sont deux droites parallèles.

Les méthodes – T° spé : Vecteurs dans l'espace

Colinéarité et relation de Chasles :



Soit $ABCD$ un tétraèdre et les points M et N tels que $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CN} = 2\,\overrightarrow{BC}$.

Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires.

Solution :

Nous allons exprimer les deux vecteurs dans une même base :

D'une part, $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC}$ (relation de Chasles). Donc, $\overrightarrow{MC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

D'autre part, $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + 2\,\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + 3\,\overrightarrow{BC}$.

Nous remarquons que $\overrightarrow{AN} = 3\,\overrightarrow{MC}$. Les vecteurs $\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont donc colinéaires.

Montrer que trois vecteurs sont coplanaires :

Soit $ABCD$ un tétraèdre. Soit M le point tel que $\overrightarrow{AM} = 3\,\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}$. Montrer que le point M appartient au plan (ABC).

Solution :

Montrer que les quatre points A, B, C et M sont coplanaires revient à montrer que les 3 vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ le sont.
Nous cherchons donc à exprimer $\overrightarrow{AM}$ comme une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AM} = 3\,\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}$

$\overrightarrow{AM} = 3(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}) + (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM})$

$\overrightarrow{AM} = 3\,\overrightarrow{BA} + 3\,\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM}$

$\overrightarrow{AM} = 3\,\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} + 4\,\overrightarrow{AM}$

$-3\,\overrightarrow{AM} = 3\,\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}$

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Les 3 vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont donc coplanaires et ainsi les quatre points A, B, C et M. le point M appartient au plan (ABC).

Travailler avec les coordonnées :

Dans l'espace muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, on considère les points $A(1;0{,}5;2)$, $B(0;2;0{,}5)$, $D(3;-2{,}5;1)$, $E(1;0{,}5;4)$ et $F(-3;-2;1)$.

a) Le point A appartient-il à la droite (BD) ?
b) Les points A, B, D et E sont-ils coplanaires ?
c) Le point F appartient-il au plan (ABD) ?

Solution :

a) Nous allons chercher si les points A, B et D sont alignés : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 0-1 \\ 2-0{,}5 \\ 0{,}5-2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ 1{,}5 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} 3-1 \\ -2{,}5-0{,}5 \\ 1-2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas proportionnelles ($\frac{-3}{1{,}5} \neq \frac{-1}{-1{,}5}$). Il n'existe donc aucun nombre réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{AD}$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Et donc A n'appartient pas à la droite (BD).

b) Les points A, B, D et E sont coplanaires si l'on peut exprimer les vecteur $\overrightarrow{AE}$ comme une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$: existe-t-il a et b tels que $\overrightarrow{AE} = a\,\overrightarrow{AB} + b\,\overrightarrow{AD}$?

Les coordonnées de $\overrightarrow{AE}$ sont $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}1-1\\0,5-0,5\\4-2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$. Ainsi,

$\overrightarrow{AE} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AD}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}0=-a+2b\\0=1,5a-3b\\2=-1,5a-b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2b\\a=2b\\3a+2b=-4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2b\\a=2b\\3\times 2b+2b=-4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2b\\a=2b\\8b=-4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-1\\b=-0,5\end{cases}.$$

Nous avons donc $\overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AB} - 0,5\overrightarrow{AD}$

Les points A, B, D et E sont donc coplanaires.

b) Les points A, B, D et F sont coplanaires si l'on peut exprimer les vecteur $\overrightarrow{AF}$ comme une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$: existe-t-il a et b tels que $\overrightarrow{AF} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AD}$?

Les coordonnées de $\overrightarrow{AF}$ sont $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}-3-1\\-2-0,5\\1-2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}-4\\-2,5\\-1\end{pmatrix}$. Ainsi,

$\overrightarrow{AF} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AD}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-4=-a+2b\\-2,5=1,5a-3b\\-1=-1,5a-b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2b+4\\-5=3(2b+4)-6b\\2=3(2b+4)+2b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2b+4\\-5=12\\8b=-10\end{cases}.$$

Il n'existe donc pas de couple de réels a et b solution de ce système. Les points A, B, D et F sont donc non coplanaires. Le point F n'appartient pas au plan (ABD). **On peut ajouter que les trois vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AF}$ forment une base de l'espace.**

Autres méthodes, astuces, notions… rencontrées :